

Mosaikieren von Fernerkundungsdaten für im Verbund fliegende CubeSats

Mosaicing Remote Sensing Data for Federally Flying CubeSats

Robert Roschlaub | Clemens Glock | Manfred Zerndl |
Andreas Maier | Karin Möst | Thomas Krey

Zusammenfassung

Bei der stufenweisen Realisierung des Bayerischen Satellitennetzwerks ist die Bayerische Vermessungsverwaltung (BVV) im Rahmen einer Demonstratormission gefordert, ein zweidimensionales Prozessierungsmodell für bayerische Satellitenbilder zu entwickeln. Dabei wurde eine neuartige Methode zum Mosaikieren von Fernerkundungsdaten konzeptioniert, die sowohl eine Georeferenzierung von einzelnen Bildern als auch von gesamten Bildszenen mit einer geringen Ausrichtungsgenauigkeit und unzureichender bis fehlender Überlappung ermöglicht, wie es im Rahmen einer Forschungsk Kooperation beim Einsatz miniaturisierter Satelliten, den sogenannten CubeSat-Satelliten, der Fall sein kann.

Ein neuartiges, auf das Ortra-Membranverfahren aufbauendes Verfahren, das den Ortra-Ansatz auf Dreiecke spezialisiert und das erstmalig in einer zur Implementierung geeigneten partitionierten Darstellung notiert ist, wird als ebene Bündelblockausgleichung vorgestellt und zum Georeferenzieren von Fernerkundungsdaten, der Qualitätssicherung und der Vorbereitung des Mosaikierens eingesetzt. In diesem Beitrag erfolgt die Implementierung des neuen Lösungsansatzes durch eine Verdichtung des Triangulationsnetzes mit Steiner-Punkten, um im Modell der in UTM durchzuführenden Orthorektifizierung¹ zu minimalen Verzerrungen des Satellitenbilds zu gelangen. Es werden verschiedene Ansätze zur Orthorektifizierung untersucht, insbesondere auf ihre Genauigkeit, Performance und ihren Einsatz auf CPUs und GPUs. Der Nachweis der vorgeschlagenen Verfahrenslösung erfolgt anhand eines Simulators mit resampelten, lagerichtigen Digitalen Orthophotos (TrueDOP) und mit PlanetScope-Aufnahmen.

Schlüsselwörter: CubeSats, Orthorektifizierung, Sibson-Interpolation, Voronoi-Diagramm, Delaunay-Triangulation, Steiner-Punkte, Ortra-Verfahren, Ortra-Membranverfahren, Ortra-Gitter-Ansatz

Summary

As part of the step-by-step realization of the Bavarian satellite network, Bayerische Vermessungsverwaltung (BVV) is required to develop a two-dimensional processing model for Bavarian satel-

lite images as part of a demonstration mission, a novel method for mosaicking remote sensing data is conceptualized, which allows georeferencing of single images as well as of entire image scenes with low alignment accuracy and insufficient up to missing overlap, as it may be the case in the context of a research cooperation using miniaturized satellites, the so-called CubeSat satellites.

A novel method based on the Ortra membrane method, which specializes the Ortra approach to triangles and which is notated for the first time in a partitioned representation suitable for implementation, is presented as a planar bundle block adjustment and used for georeferencing remote sensing data, quality assurance and preparation for mosaicking. In this paper, the new approach is implemented by densification of a triangle network with Steiner points to achieve minimal distortion of the satellite image during orthorectification¹ to be performed in UTM. Various approaches to orthorectification are examined, in particular with regard to their accuracy, performance and their use on CPUs and GPUs. The verification of the proposed solution is done with a simulator with resampled, positional correct digital orthophotos (TrueDOP) and with PlanetScope images.

Keywords: CubeSats, orthorectification, Sibson interpolation, Voronoi diagram, Delaunay triangulation, Steiner Points, Ortra method, Ortra membrane method, Ortra lattice approach.

1 Einführung

In einer Forschungsk Kooperation der Bayerischen Vermessungsverwaltung (BVV) mit der Technischen Universität München (TUM) und dem Zentrum für Telematik (ZfT) in Würzburg ist der Einsatz von Nano-Satelliten mit weniger als 10 kg Masse angestrebt (Bauer et al. 2023, Kleinschrodt et al. 2023, Greza et al. 2023). Die Kooperationspartner greifen den weltweiten Trend hin zu kostengünstigen Mikrosatelliten auf und setzen ihn in einer eigenen Mission um. Mit einem Zugriff auf die gesamte Prozesskette, von den Rohdaten bis zu den veredelten Produkten, können Nutzer zielgerichtet in ihrer Aufgabenerledigung unterstützt werden. Das stärkt zugleich den Erhalt der digitalen Souveränität der Verwaltung. Es sollen leistungsfähige, recht genau ausrichtbare CubeSats von S4, der Smart Small Satellite Systems GmbH, eingesetzt werden. Nachdem sich

1 https://www.dlr.de/eoc/desktopdefault.aspx/tabid-6144/10056_read-20918/

zur Georeferenzierung der Fernerkundungsdaten die erforderlichen Anschlusspunkte (Passpunkte) mittels Deep Learning und Gebäudedaten des Liegenschaftskatasters zweidimensional identifizieren lassen, werden auf Grundlage einer Delauney-Triangulation neue Orthorektifizierungsmethoden vorgestellt, um qualitativ gute Entzerrungen zu erzielen.

In der klassischen Photogrammetrie werden die aus einer Befliegung erfassten Luftbilder mit bekannter dreidimensionaler äußerer Orientierung und ausreichender Längs- und Querüberdeckung mittels einer Bündelblockausgleichung semiautomatisiert zu einem zweidimensionalen Mosaik zusammengeführt.

Beim Einsatz von Nano-Satelliten liegt die erzielbare Ausrichtgenauigkeit zwischen 1° und $0,01^\circ$ bei Verwendung entsprechender Sensorik. Zudem können die CubeSats zur stabilen Einhaltung der Flugbahn und zur Minimierung und Dämpfung von Taumeleffekten mit einem Antrieb und einem Lagerungssystem ausgestattet werden. Der Antrieb hat als Hauptfunktion das Absinken der Umlaufbahn durch Reibung mit den Atmosphärenpartikeln auszugleichen. Bei Verwendung eines einzigen Triebwerks kann damit nur die Größe des Schubvektors festgelegt werden. Mit einem zusätzlichen Lageregelungssystem lässt sich der Schubvektor in eine vordefinierte Richtung orientieren, sodass die Ausrichtung des Satelliten (d. h. das Stabilisieren gegen Taumelbewegungen) durch das Lageregelungssystem sichergestellt wird. Weiterhin lassen sich CCD-Flächenkameras mit einem Längen-Breiten-Verhältnis von 20:1, die eine landesweite Datenerfassung in Flugstreifen ermöglichen, auf Kleinsatelliten einsetzen, wie sie beispielsweise in der oben genannten Forschungs Kooperation genutzt werden sollen. Die Aneinanderreihung der vom Satelliten in einer Zentralperspektive aufgenommenen Zeilen wird als Szene bezeichnet und enthält in der Flugrichtung, die in einer Parallelprojektion aufgenommen wird, keine Längsüberdeckung. Eine Querüberdeckung der Szenen ist durch eine geeignete Wahl der Flugbahn steuerbar und in der Regel abhängig von der Anzahl der, idealerweise im Verband fliegenden, Satelliten. Eine Georeferenzierung und das Zusammenfügen der Satellitenaufnahmen zu einem Mosaik kann bei hohen Wiederholungsraten der Satellitenüberflüge nur automatisiert erfolgen. Vorausgesetzt werden kann, dass die Szenen mittels der CubeSat-Satelliten-Sensoren anhand der globalen 3D-Koordinaten via GPS und Sternkameras genähert georeferenziert sind und in einem einheitlichen, ebenen Koordinatensystem vorliegen.

Unter der Maßgabe, dass die Differenz der Bogenlänge zur Sehnenlänge auf der Erdkugel kleiner als die Hälfte eines Pixels sein muss, ist bei einer Bodenauflösung von ca. 3,5 m und einer Zerlegung der Satellitenszene in Längen kleiner 78,5 km eine hinreichend genaue Auswertung der Satellitenbilder durch Vernachlässigung der Erdkrümmung im ebenen Modell möglich, ohne einen Pixelversatz durch die Verebnung zu erzeugen. Analytische Modelle für Atmosphären-, Sensor- sowie optische Systemeffekte sind in (Lenz und Greza 2023) dargestellt.

Ziel ist es, die CubeSat-Satellitenbilder über ein verdichtetes Netz an Anschluss- und Massepunkten zunächst zu georeferenzieren und anschließend in ein regelmäßiges bayernweites Raster zu überführen. In diesem Beitrag gilt es aufzuzeigen, wie landesweite Daten von im Verbund fliegenden CubeSat-Satelliten ausgeglichen werden können, unabhängig davon, ob die aufgenommenen Szenen sich überlappen oder nicht.

Durch Deep Learning bzw. Künstliche Intelligenz (KI) und Delaunay-Triangulationen können Gebäude als Anschlusspunkte in Satellitenbildern automatisiert identifiziert und zur ebenen Georeferenzierung genutzt werden (Roschlaub et al. 2023). Im Rahmen dieses Beitrags werden sowohl die identifizierten Anschlusspunkte als auch die verbleibenden, mittels Deep Learning im Satellitenbild detektierten KI-Gebäude als Massepunkte in einem triangulierten Gesamtsystem übergeben und ausgeglichen. Der Wahl des Ausgleichs- bzw. Interpolationsverfahrens zur Orthorektifizierung der Fernerkundungsdaten kommt somit eine maßgebende Rolle zu. Beim Ausgleichsverfahren wird in Kap. 2 ein verkettetes Netz von Polarsystemen zu einem triangulierten Netz (Membranen) zusammengeführt. Dieses Netz wird mittels eines neuartigen Ortra-Membranverfahrens, das auf das Ortra-Verfahren (Hampp und Glock 2017) aufbaut, ausgeglichen.

Zur Vorbereitung der Orthorektifizierung wird in Kap. 3 das triangulierte Netz vor einer Ausgleichung mit Steiner-Punkten verdichtet. Für die anschließende Orthorektifizierung werden zwei Interpolationsansätze und ein Ausgleichsansatz zum Mosaikieren der Satellitenbilder, also dem Zusammenfügen in ein regelmäßiges landesweites Rasterbild, untersucht. Dies ist zum einen der Ortra-Gitter-Ansatz, der dem Ortra-Membranverfahren nachgeschaltet ist, und zum anderen das Interpolationsverfahren nach Sibson (Sibson 1980, 1981) sowie ein weiteres Interpolationsverfahren, das den nächstgelegenen Nachbarn verwendet.

Zur Verfahrensbeschreibung der Anwendung der Ausgleichs- und Orthorektifizierungsverfahren auf CubeSat-Satellitendaten stehen auf 4 m Bodenauflösung resampelte TrueDOP in einem Simulator für den gesamten Landkreis von Ansbach zur Verfügung. In Kap. 4 werden empirische Untersuchungen zur Performance und Genauigkeit der Orthorektifizierungsverfahren geführt. Ein praktischer Nachweis erfolgt in Kap. 5 mittels Satellitendaten von PlanetScope. Für den weniger mathematisch Interessierten wird der Einstieg in Kap. 3 empfohlen.

2 Anwendung des Ortra-Membranverfahrens

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen des Ortra-Verfahrens und des auf Dreiecke spezialisierten Ortra-Membranverfahrens in einer partitionierten Form dargestellt, um darauf aufbauend im nachfolgenden dritten Kapitel TrueDOPs und im fünften Kapitel Satellitenbilder

zu mosaikieren. Dazu wird für das Ortra-Membranverfahren ein trianguliertes Netz aufgebaut, in dem vor der Ausgleichung nur ein Teil der Dreiecksflächen Eckpunkte als Anschlusspunkte besitzen (Roschlaub et al. 2023).

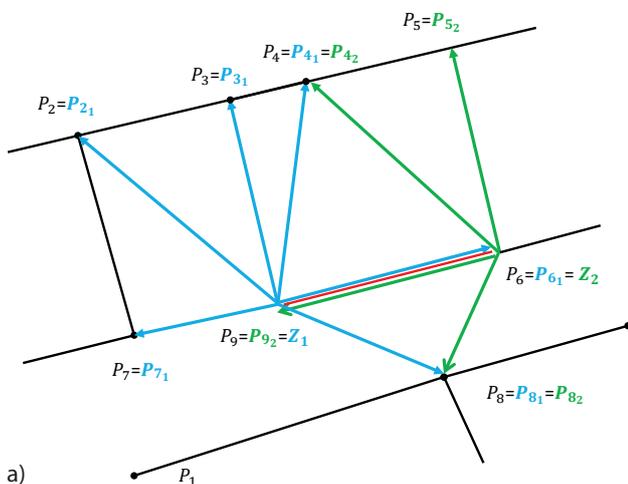
2.1 Das Ortra-Verfahren

Das Grundprinzip des Ortra-Verfahrens wurde erstmalig zur landesweiten Transformation des Liegenschaftskatasters vom GK-Koordinatensystem nach UTM in Bayern eingesetzt (Hampp und Glock 2017). Das auf Verkettung von Helmertransformtionen beruhende Ortra-Verfahren nutzt orthogonale Beobachtungsdefinitionen für die Ausgleichung. Es wurden Analogien des Ortra-Verfahrens zu elasto-mechanischen Methoden aus der Baustatik nachgewiesen, bei dem sich die auszugleichenden Netze in einem statischen Gleichgewicht befinden und nach mechanischen Gesetzen und Energieprinzipien, wie dem Prinzip der minimalen Formänderungsenergie, reagieren (Glock 2019, 2021).

Sei \mathcal{P} eine nicht kollineare Punktmenge bestehend aus n Punkten $P_i(x_i, y_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Ausgehend von der Ähnlichkeitstransformation:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -t_2 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

mit den Transformationsparametern t_1, \dots, t_4 , basiert das Ortra-Verfahren auf einer Vielzahl von polaren Systemen, für die orthogonale Beziehungen aufgebaut werden (vgl. Abb. 1). Aus den Parametern t_1 und t_2 berechnet sich der Maßstab M zu $M^2 = t_1^2 + t_2^2$. Für jedes der polaren Zentren $Z_j \in \mathcal{P}$ ergibt sich aus der Koordinatendifferenz eines beliebigen Punktes P_i für $i \neq j$ zum Zentrum Z_j die Beziehung:



$$\begin{pmatrix} X_i - X_{Z_j} \\ Y_i - Y_{Z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1j} & t_{2j} \\ -t_{2j} & t_{1j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_{Z_j} \\ y_i - y_{Z_j} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Jeder der Punkte P_i kann mehreren Ortra-Systemen zugeordnet werden, wobei gilt, dass jeder Punkt P_i zugleich immer den Ursprung eines Ortra-Systems definiert. Im jeweiligen Ortra-System kann die Auswahl der Anschlusspunkte beliebig sein, solange die Bedingung erfüllt ist, dass zu einem Punkt mindestens zwei Beobachtungen durchgeführt werden. In Abb. 1 werden beispielsweise mit dem dargestellten Beobachtungsaufbau die Punkte P_2 , P_3 und P_7 zunächst singular, weil nur eine Beobachtung zu ihnen aufgebaut wurde. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurde jedoch auf eine Darstellung weiterer, benachbarter Ortra-Systeme verzichtet, die dann mindestens eine zweite Beobachtung zu den Punkten definieren. Aus der Eigenschaft, dass jeder Punkt P_i zugleich einen Koordinatenursprung darstellt, folgt, dass die Anzahl der Ortra-Systeme identisch der Anzahl der zu transformierenden Punkte P_i sein muss, d. h. $i, j = 1, \dots, n$. Die Gesamtheit der n Systeme bildet einen Verbund gekoppelter Ortra-Systeme, der das Ortra-Gesamtsystem darstellt. In Abb. 1 wird beispielhaft ein Ortra-Gesamtsystem, bestehend aus zwei lokalen Ortra-Systemen, dargestellt. Die Unbekannten in (2) sind die Transformationsparameter t_{1j} und t_{2j} der Ähnlichkeitstransformation und die Zentrumskoordinaten (X_{Z_j}, Y_{Z_j}) des j -ten Ortra-Systems.

In einem Ortra-Gesamtsystem sind deswegen die ins Zielsystem zu transformierenden Punkte $P_i(X_i, Y_i)$ bekannt, weil sie wegen $i, j = 1, \dots, n$ zugleich Zentrumskoordinaten eines gekoppelten Ortra-Systems sind. Folglich ist (2), mit seinen vier Unbekannten, ein zweifach unterbestimmtes lineares Gleichungssystem. Mit der Definition eines Vor- und Rückblicks werden für jede Verbindungslinie (Kante) zwischen den Ortra-Systemen zwei zusätzliche Koordinatendifferenzen in (2) eingeführt (vgl. rote Linie in Abb. 1), um die Unterbestimmung von (2) zu beheben.

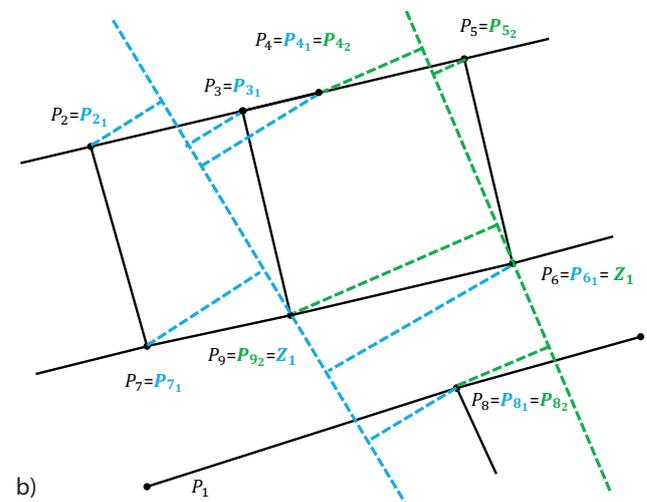


Abb. 1: (a) Ein aus zwei polaren Ortra-Systemen mit den Zentren Z_1 und Z_2 definiertes Ortra-Gesamtsystem (b) und das durch Transformation korrespondierende orthogonale Gesamtsystem, das aus örtlichen Orthogonalsystemen besteht.

2.1.1 Das funktionale Modell des Ortra-Gesamtsystems

Das funktionale Modell des Ortra-Gesamtsystems setzt sich aus zwei Teilmodellen zusammen, die im Folgenden beschrieben werden.

a) Das Modell der Koordinatendifferenzen als Bedingungsgleichung

Die Zuordnungen der Punkte P_i zu einem oder mehreren Ortra-Systemen kann für $i \neq j$ mit P_{ij} ausgedrückt und in (2) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} X_{ij} - X_{Z_j} - t_{1j}(x_{ij} - x_{Z_j}) - t_{2j}(y_{ij} - y_{Z_j}) &= 0, \\ Y_{ij} - Y_{Z_j} + t_{2j}(x_{ij} - x_{Z_j}) - t_{1j}(y_{ij} - y_{Z_j}) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Anzahl der dem j -ten Zentrum Z_j zugeordneten Punkte kann zwischen den $j = 1, \dots, n$ Ortra-Systemen beliebig variieren (vgl. Abb. 1). Sie wird mit p_j bezeichnet und kann insgesamt $l = 1, \dots, p_j \leq n$ Punkte umfassen:

$$\begin{aligned} X_{ij,l} - X_{Z_j} - t_{1j}(x_{ij,l} - x_{Z_j}) - t_{2j}(y_{ij,l} - y_{Z_j}) &= 0, \\ Y_{ij,l} - Y_{Z_j} + t_{2j}(x_{ij,l} - x_{Z_j}) - t_{1j}(y_{ij,l} - y_{Z_j}) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

b) Das Modell der Anschlusspunkte in Bedingungsgleichungen

Das in (4) beschriebene funktionale Modell beschreibt ein freies Streckennetz, das nicht an ein übergeordnetes Koordinatensystem angeschlossen ist. Dies erfolgt erst durch die Einführung von Anschlusspunkten.

Zur Transformation eines Ortra-Gesamtsystems vom Start- ins Zielsystem können beliebige Punkte $P_i \in \mathcal{P}$ als Anschlusspunkte (Passpunkte) eingeführt werden, wenn für diese Punkte die Koordinaten in beiden Systemen vorliegen. Zur Beseitigung des Rangdefekts eines durch (4) definierten Ortra-Gesamtsystems sind zwei Anschlusspunkte ausreichend. In Abb. 2 wurde durch Definition von drei identischen Punkten somit der Rangdefekt beseitigt. Dies gilt unabhängig davon, ob diese Punkte Verknüpfungspunkte zwischen den Ortra-Systemen bilden, Zentrums punkten $Z_j \in \mathcal{P}$ von Ortra-Systemen entsprechen oder verbleibende Punkte der Punktmenge $P_i \in \mathcal{P}$ darstellen. Die $k = 1, \dots, m < n$ Anschlusspunkte werden beschrieben durch:

$$A_i^k = \left\{ (X_i^k, Y_i^k), (x_i^k, y_i^k) \right\} \in \mathcal{P}$$

und die Menge der Anschlusspunkte wird bezeichnet mit:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{m < n} A_i^k \subset \mathcal{P}$$

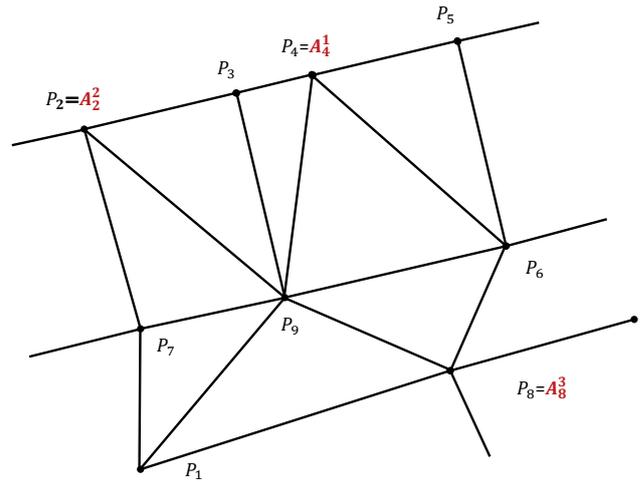


Abb. 2: Zuordnung des k -ten Anschlusspunktes A_k zum Punkt P_i durch A_i^k in einem triangulierten Netz.

Alle Anschlusspunkte $A_i^k \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ sind zugleich Zentrums punkte eines Ortra-Systems, sodass für $i = j$ gilt:

$$\begin{aligned} X_i^k - X_{Z_j}^k &= 0, \\ Y_i^k - Y_{Z_j}^k &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Der in (5) beschriebene Zusammenhang lässt sich nach (Niemeier 2008) sinngemäß in eine fiktive Beobachtung für Koordinaten überführen und verhindert einen Rangdefekt in der Modellmatrix A in (9).

2.1.2 Das Ausgleichsmodell

Anhand einer vermittelnden Ausgleichung werden aus den Bedingungsgleichungen (4) und unter Hinzunahme von (5) die Unbekannten des Ortra-Gesamtsystems geschätzt:

$$\min_x (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}) \text{ mit } \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}. \tag{6}$$

Mit $i, j = 1, \dots, n$ sind für $i = j$ die Unbekannten in (6), die Transformationsparameter t_{1j}, t_{2j} des j -ten Ortra-Systems und die Zentrums koordinaten (X_{Z_j}, Y_{Z_j}) im Zielsystem. Da das funktionale Modell bereits linear ist, werden keine Näherungswerte bei einer formellen Linearisierung benötigt.

In (6) bezeichnet $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_0^T, \mathbf{l}_1^T, \dots, \mathbf{l}_m^T)^T \in \mathbb{R}^{s+r}$ den Beobachtungsvektor. Darin sind die Beobachtungen $\mathbf{l}_0 \in \mathbb{R}^s$ wegen (4) zu $\mathbf{l}_0 = \mathbf{0}$ definiert, sodass \mathbf{l}_0 einem Nullvektor entspricht. Die Dimension s ist die Summe aus den partitionierten $j = 1, \dots, n$ Ortra-Systemen, die jeweils aus einer Anzahl von p_j Punkten $P_i \in \mathcal{P}$ bestehen, sodass folgt:

$$s = \sum_{j=1}^n 2p_j. \tag{7}$$

Für die $k = 1, \dots, m < n$ Anschlusspunkte $A_i^k \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ aus (5) des Ortra-Gesamtsystems (vgl. Abb. 2) ergeben sich $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_m$ Beobachtungsvektoren im Zielsystem mit:

$$I_k = \begin{pmatrix} X_{Z_j}^k \\ Y_{Z_j}^k \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2.$$

Folglich bestimmt sich die Dimension r des Beobachtungsvektors $(I_1^T, \dots, I_m^T)^T \in \mathbb{R}^r$ zu

$$r = 2m. \quad (8)$$

Der Vektor der Unbekannten lautet

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T \in \mathbb{R}^{4n}$$

mit $\mathbf{x}_0 = (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$

und $\mathbf{x}_j = (t_{1j}, t_{2j})^T \in \mathbb{R}^2$ für $j = 1, \dots, n$.

Für alle Punkte $P_{ij} \in \mathcal{P}$ lassen sich mit Hilfe von s die Gleichungen (4) des in 2.1.1 a) formulierten funktionalen Modells durch g_1, \dots, g_s fortlaufend durchnummerieren. Beispielsweise bezeichnen g_1, g_2 für den ersten Punkt im ersten Ortra-System (d.h. $j = 1$):

$$g_1 : X_{i,1} - X_{z_1} - t_{11}(x_{i,1} - x_{z_1}) - t_{21}(y_{i,1} - y_{z_1}) = 0,$$

$$g_2 : Y_{i,1} - Y_{z_1} + t_{21}(x_{i,1} - x_{z_1}) - t_{11}(y_{i,1} - y_{z_1}) = 0.$$

Sie lauten für das in Abb. 1 in blau dargestellte Ortra-System des ersten Punktes P_7 zum ersten Zentrum $Z_1 = P_9$:

$$g_1 : X_7 - X_9 - t_1(x_7 - x_9) - t_2(y_7 - y_9) = 0,$$

$$g_2 : Y_7 - Y_9 + t_2(x_7 - x_9) - t_1(y_7 - y_9) = 0.$$

Ebenso lassen sich für alle Anschlusspunkte $A_i^k \in \mathcal{A}$ mit Hilfe der aus (8) bestimmten Anzahl r die Bedingungsgleichungen in (5) durch h_1, \dots, h_r fortlaufend durchnummerieren. Dazu werden für $i = j$ die Koordinaten $(X_{Z_j}^k, Y_{Z_j}^k)$ im Zielsystem in den Beobachtungsvektor gespeichert.

Damit kann die Modellmatrix A in (6), unter Berücksichtigung der in (7) und (8) berechneten Dimensionen s und r , durch folgende Blockmatrizen ausgedrückt und die Dimension festgelegt werden:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^d & \mathbf{C}^d \\ \mathbf{D}^p & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+r) \times 4n}. \quad (9)$$

Der obere Block $(\mathbf{B}^d \ \mathbf{C}^d) \in \mathbb{R}^{s \times 4n}$ der Matrix A repräsentiert die aus (4) gebildeten Koordinatendifferenzen des Ortra-Gesamtsystems und beschreibt darüber hinaus die Topologie dieses Systems. Dies sind implizite Abstandsbeziehungen zwischen den Ortra-Systemen. Dabei ist die Submatrix \mathbf{C}^d spaltenweise nach den n -Ortra-Systemen sortiert.

Der untere Block $(\mathbf{D}^p \ \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{r \times 4n}$ der Modellmatrix A beschreibt den aus (5) ergänzten Block der Anschlusspunkte. Die Gleichungen werden als fiktive Beobachtungen bezeichnet. Die Einführung der Submatrix \mathbf{D}^p verhindert die

durch die Modellmatrix A in die Normalgleichung induzierte Singularität.

Die oberen Blockmatrizen $(\mathbf{B}^d \ \mathbf{C}^d) \in \mathbb{R}^{s \times 4n}$ können wiederum als ein System aus Submatrizen dargestellt werden:

$$(\mathbf{B}^d \ \mathbf{C}^d) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times (2n+n-2)},$$

mit $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{2p_j \times 2n}$ für jedes der $j = 1, \dots, n$ Ortra-Systeme:

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1}, & \frac{\partial g_1}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial X_n}, & \frac{\partial g_1}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial g_2}{\partial X_n}, & \frac{\partial g_2}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{2p_j-1}}{\partial X_1}, & \frac{\partial g_{2p_j-1}}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial g_{2p_j-1}}{\partial X_n}, & \frac{\partial g_{2p_j-1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial g_{2p_j}}{\partial X_1}, & \frac{\partial g_{2p_j}}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial g_{2p_j}}{\partial X_n}, & \frac{\partial g_{2p_j}}{\partial Y_n} \end{pmatrix}.$$

und $\mathbf{C}_j \in \mathbb{R}^{2p_j \times 2}$ für $j = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} -(x_{i,j,1} - x_{z_j}) & -(y_{i,j,1} - y_{z_j}) \\ -(y_{i,j,1} - y_{z_j}) & +(x_{i,j,1} - x_{z_j}) \\ -(x_{i,j,2} - x_{z_j}) & -(y_{i,j,2} - y_{z_j}) \\ -(y_{i,j,2} - y_{z_j}) & +(x_{i,j,2} - x_{z_j}) \\ \vdots & \vdots \\ -(x_{i,j,p_j} - x_{z_j}) & -(y_{i,j,p_j} - y_{z_j}) \\ -(y_{i,j,p_j} - y_{z_j}) & +(x_{i,j,p_j} - x_{z_j}) \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen von \mathbf{B}_j enthalten die partiellen Ableitungen der Koordinaten mit den für das j -te Ortra-System beteiligten Punkten, sodass in jeder Zeile nur die Werte 1, -1 und null vorkommen.

Ferner lautet die untere Blockmatrix $\mathbf{D}^p \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ der Modellmatrix A :

$$\mathbf{D}^p = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1}, & \frac{\partial h_1}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial h_1}{\partial X_n}, & \frac{\partial h_1}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial X_1}, & \frac{\partial h_2}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial h_2}{\partial X_n}, & \frac{\partial h_2}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{2m-1}}{\partial X_1}, & \frac{\partial h_{2m-1}}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial h_{2m-1}}{\partial X_n}, & \frac{\partial h_{2m-1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial h_{2m}}{\partial X_1}, & \frac{\partial h_{2m}}{\partial Y_1}, & \dots, & \frac{\partial h_{2m}}{\partial X_n}, & \frac{\partial h_{2m}}{\partial Y_n} \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Das stochastische Modell

Im Ortra-Gesamtsystem wird für $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1^T, \dots, \mathbf{l}_n^T)^T \in \mathbb{R}^s$ von unkorrelierten, normalverteilten Beobachtungen ausgegangen. Der Aufbau der Varianz-Kovarianzmatrix Σ_u bzw.

der Gewichtsmatrix $\mathbf{P} = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{ll} \right)^{-1}$ erfolgt entsprechend

der in 2.1.1 beschriebenen funktionalen Modelle der Koordinatendifferenzen und der Anschlusspunkte als partitionierte Diagonalmatrizen:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^d & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+r) \times (s+r)}. \quad (10)$$

Darin bezeichnet $\mathbf{P}^d \in \mathbb{R}^{s \times s}$ die Gewichtsmatrix der Koordinatendifferenzen. Sie entspricht einer Diagonalmatrix $\mathbf{P}^d = \text{Diag}(pp_1, \dots, pp_s)$ und enthält, wie am Beispiel der Transformation des amtlichen Liegenschaftskatasters in (Glock 2021) vorgeschlagen, streckenabhängige Gewichte für die aus (4) im j -ten Ortra-System resultierenden Punkt-abstände.

Die diagonale Gewichtsmatrix $\mathbf{P}^p \in \mathbb{R}^{r \times r}$ der beobachteten Zentrumskoordinaten $\mathbf{l}^p = (\mathbf{l}_1^T, \dots, \mathbf{l}_m^T)^T \in \mathbb{R}^r$ enthält auf der Diagonalen für beide Koordinatenachsen identisch hohe Gewichte. Durch Zuweisung mit dem konkreten Wert $pp_l = 10.000$, $l = 1, \dots, 2m$ erhalten alle Zentrumskoordinaten dasselbe unendliche Gewicht. Diese Vorgehensweise – Einführung eines unendlichen Gewichts – ist in den 1960er Jahren in der Photogrammetrie beispielsweise bei Ackermann zu finden (Ackermann 1973) und repräsentiert den Zwangsanschluss des aus Koordinatendifferenzen aufgebauten Netzes an die Anschlusspunkte.

Dieses stochastische Modell wird analog für die Ausgleichung der ins amtliche UTM-Koordinatensystem (Zielsystem) zu transformierenden Koordinaten von den im Satellitenbild beobachteten Objekten (Startsystem) übernommen.

2.1.4 Lösung des Ortra-Verfahrens

Die Lösung von (6) liefert in Verbindung mit dem stochastischen Modell (10) Schätzungen für die Unbekannten. Dies sind die Transformationsparameter $\hat{t}_{1_j}, \hat{t}_{2_j}$ für jedes der $j = 1, \dots, n$ Ortra-Systeme und die Zentrumskoordinaten $(\hat{X}_{z_j}, \hat{Y}_{z_j})$ im Zielsystem.

Eine Schätzung der Unbekannten x in (6) liefert die Lösung der klassischen Normalgleichung: $\hat{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$, die durch eine Cholesky-Zerlegung (Schwarz et al. 1972) auch für eine dünn besetzte Modellmatrix \mathbf{A} durch Anwendung von Sparse-Matrizen mit regulären, unteren Dreiecksmatrizen implizit gelöst werden kann.

Eine alternative, explizite Schätzung der Unbekannten in (6) kann mittels der Pseudoinversen und einer Cho-

lesky-Zerlegung der in (10) formulierten Gewichtsmatrix $\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ durch die Pseudonormallösung erfolgen:

$$\hat{x}^+ = (\mathbf{C} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \mathbf{l}. \quad (11)$$

2.1.5 Ergebnis des Ortra-Verfahrens

Vor Anwendung des Ortra-Verfahrens liegen die Koordinaten sämtlicher im Satellitenbild detektierten Gebäudeschwerpunkte als Zentrumskoordinaten zunächst noch im Startsystem vor. Mit der Ausgleichung mit Zwangsanschluss an die Passpunkte ergeben sich die unbekanntenen Transformationsparameter und ausgeglichenen Zentrumskoordinaten im Zielsystem für alle Gebäudepunkte. Deren Koordinatendifferenzen zum Startsystem (Restklaffungen) können für die spätere Orthorektifizierung genutzt werden.

2.2 Das Ortra-Membranverfahren

Das Ortra-Membranverfahren wird aus einer beliebigen Anzahl an Polarsystemen gebildet (vgl. Abb. 1a), die in orthogonale Beziehungen gesetzt werden können (vgl. Abb. 1b). Für nicht selbst überschneidende Polarsysteme können eindeutige Dreiecke gebildet werden, die im Folgenden als Membranen bezeichnet werden (genauso wie bei den Finite-Elemente-Verfahren der Baustatik). Das Ortra-Membranverfahren bildet die Dreiecke in ihren polaren Systemen ab. Ziel des Ortra-Membranverfahrens ist es, die Dreiecke bei der Transformation vom Start- ins Zielsystem durch lokale Rotationen und Maßstäbe je Polarsystem nur minimal zu verzerren. Die Umsetzung wird im Folgenden definiert.

Auf Basis des in (Glock 2021) dargestellten Verfahrens wird hier neuartig beim Übergang der Beobachtungen von Grundrissbeobachtungen zu Dreiecksbeobachtungen ein analog zum Membranverfahren nach (Gielsdorf und Gründig 1997) arbeitendes System definiert, das minimale Formveränderung der Dreiecke im Zielsystem als Ausgleichungsergebnis liefert, jedoch dabei orthogonale Beobachtungen nach (4) anwendet. Es wird als Ortra-Membranverfahren bezeichnet. Das Ortra-Membranverfahren ist den Systemen der Netzoptimierung zuzurechnen, die aus einer Kombination einer Gewichts- und Lagerungsoptimierung bestehen. Entgegen einer punktspezifischen, nachbarschaftstreuen Transformation ist es ein auf einer Ausgleichung basierendes nachbarschaftstreu arbeitendes Verfahren, welches für alle in die Ausgleichung eingeführten Punkte Restklaffungen definieren kann. Dabei werden Koordinatenwidersprüche $\Delta \hat{w}$ zwischen einer unverzerrten, mit Mitteln der Ausgleichung \hat{x}_1^+ aufgebauten freien Netzkonfiguration und einer, in einen im Zielsystem festen Koordinatenreferenzrahmen eingespannten, ebenfalls durch Ausgleichung \hat{x}_2^+ aufgebauten angeschlossenen Netzkonfiguration bestimmt. Beide Netzkonfigurationen werden

durch ein und dasselbe aus Koordinatendifferenzen gebildete Netz des Ortra-Gesamtsystems, bzw. im Sonderfall aus Koordinatendifferenzen des Netzes der Delaunay-Triangulation, definiert. Die Konfigurationen unterscheiden sich lediglich im stochastischen Modell. Die resultierenden Koordinatenwidersprüche $\Delta\hat{\boldsymbol{w}}$ zwischen den beiden Modellen werden sowohl an den Anschluss- als auch an den Massepunkten als Differenzvektoren aus den Koordinatendifferenzen der beiden Ausgleichungen (11) ermittelt:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{x}}_2^+ - \hat{\boldsymbol{x}}_1^+ = \left(\Delta\hat{\boldsymbol{w}}_0^T, \Delta\hat{\boldsymbol{w}}_1^T, \dots, \Delta\hat{\boldsymbol{w}}_n^T \right)^T. \quad (12)$$

Die Differenz der beiden Ausgleichsergebnisse liefert den Widerspruchsvektor $\Delta\hat{\boldsymbol{w}}$, der sowohl an den m -Anschlusspunkten der Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ als auch an den $(n - m)$ -Massepunkten der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ P_j(x_j, y_j) \text{ für } j \in \{1, \dots, n\} \right\} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$$

nachbarschaftreu interpolierte Koordinatendifferenzen (Restklaffungen) enthält:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{w}}_0 = \left(\Delta\hat{X}_1, \Delta\hat{Y}_1, \dots, \Delta\hat{X}_n, \Delta\hat{Y}_n \right)^T \quad (13)$$

sowie weitere, nachbarschaftstreu bestimmte Klaffungen bei den Transformationsparametern:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{w}}_j = \left(\Delta\hat{t}_1, \Delta\hat{t}_2 \right)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ für } j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

2.2.1 Aufbau der freien Netzkonfiguration

Die freie Netzausgleichung soll mit vernachlässigbarer Spannung kleiner Größenordnung erfolgen. Dazu wird im stochastischen Modell der in (10) partitionierten Gewichtsmatrix \boldsymbol{P} die Gewichtsmatrix der Koordinatendifferenzen $\boldsymbol{P}^d = \boldsymbol{I}$ mit einem streckenunabhängigen Gewicht 1,0 versehen, im Gegensatz zu den in Kap. 2.1.3 beschriebenen streckenabhängigen Gewichten der angeschlossenen Netzkonfiguration. Die Gewichtsmatrix der Zentrumskoordinaten $\boldsymbol{P}^p = 0,1 \cdot \boldsymbol{I}$ erhält ein niedrigeres Gewicht von 0,1. Mit dieser Differenzierung der Gewichtung zwischen den Submatrizen \boldsymbol{P}^d und \boldsymbol{P}^p ergeben sich für das aus Koordinatendifferenzen gebildete Netz einer freien Netzausgleichung minimale Fehlerellipsen an den Anschlusspunkten, die nach (Linkwitz 1988) als absolut verzerrungsfrei bezeichnet werden dürfen.

Die Koordinaten $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ der freien Netzkonfiguration berechnen sich bei unveränderter Modellmatrix \boldsymbol{A} und unverändertem Beobachtungsvektor \boldsymbol{l} , aber, wie oben beschrieben, mit geänderter Gewichtsmatrix $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}_1^T \boldsymbol{C}_1$ zu:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1^+ = \left(\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{A} \right)^+ \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{l}.$$

In der freien Netzkonfiguration beschreiben die an den Anschlusspunkten ermittelten Koordinatenwidersprüche

bestehende Netzspannungen. Die Spannungen lassen sich beispielsweise aufzeigen, indem zunächst eine Streckenausgleichung durchgeführt wird. Die in der Streckenausgleichung sichtbaren minimalen Fehlerellipsen, die auf den im Start- und Zielsystem ermittelten Streckenwidersprüchen basieren, zeigen das Ausmaß der Spannungen und Verzerrungen in der freien Netzkonfiguration im Zielsystem. Sie lassen sich durch Konfidenzellipsen an den Anschlusspunkten mit ihrem Maßstab und ihrer Orientierung visualisieren (Höpcke 1980, Niemeier 2008).

2.2.2 Aufbau der angeschlossenen Netzkonfiguration

Die angeschlossene Netzkonfiguration ist in Kap. 2.1 vollständig beschrieben. Die Berechnung der Unbekannten kann aus (6) mit der in (9) und (10) beschriebenen partitionierten Modellmatrix \boldsymbol{A} und der Gewichtsmatrix $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}_2^T \boldsymbol{C}_2$ beispielsweise über die Pseudonormallösung bestimmt werden:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2^+ = \left(\boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{A} \right)^+ \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{l}.$$

Durch den in \boldsymbol{A} und \boldsymbol{P} modellierten Anschluss an die unveränderlichen Anschlusspunkte werden die in der Netzkonfiguration existierenden Koordinatendifferenzen in den Anschlusspunkten mit Hilfe von durch Zwangsanschluss aufgebauten mechanischen Kräften im Zielsystem eliminiert.

2.2.3 Endgültige Koordinaten im Zielsystem

Die endgültigen Koordinaten des Ortra-Gesamtsystems ergeben sich aus der angeschlossenen Netzkonfiguration des Ortra-Membranverfahrens oder durch Umstellung von (12) zu:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2^+ = \left(\hat{\boldsymbol{x}}_0^T, \hat{\boldsymbol{x}}_1^T, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}_n^T \right)^T = \hat{\boldsymbol{x}}_1^+ + \Delta\hat{\boldsymbol{w}} \quad (15)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \left(\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \dots, \hat{X}_n, \hat{Y}_n \right)^T \in \mathbb{R}^{2n}.$$

In $\hat{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ sind zugleich die Koordinaten der widerspruchsbehafteten $(n - m)$ -Massepunkte mit ihren aus (13) bestimmten Koordinatenwidersprüchen (Restklaffungen) enthalten. Die verbleibenden Vektoren der angeschlossenen Netzkonfiguration $\hat{\boldsymbol{x}}_2^+$ enthalten sowohl die Transformationsparameter der m -Anschluss- als auch die der $(n - m)$ -Massepunkte:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_j = \left(\hat{t}_1, \hat{t}_2 \right)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ für } j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

3 Verfahrensanwendung auf Fernerkundungsdaten der TrueDOP

Die amtlichen Gebäudegrundrisse sind in Bayern in der Digitalen Flurkarte (DFK) dokumentiert und können für eine KI-basierte Auswertung verwendet werden. Die in das Ortra-Membranverfahren einzuführenden Masse- und Anschlusspunkte können mittels Deep Learning und Delaunay-Triangulationen anhand von Gebäudedaten des Liegenschaftskatasters automatisiert detektiert werden (Roschlaub et al. 2023). Im Landkreis Ansbach sind dies 119.661 DFK-Gebäudeschwerpunkte. Die für die Bestimmung der Anschlusspunkte erforderliche Delaunay-Triangulation kann im Vorfeld für die Daten im Liegenschaftskataster unabhängig von aktuellen Satellitenaufnahmen erfolgen, beispielsweise auf Basis von monatsaktuellen Gebäuden mit einer im Python-Modul SciPy (Fortran-Routinen) implementierten Routine. Bei einer Erkennungsrate von 55 % liegen 63.852 KI-Gebäude für den Landkreis Ansbach im TrueDOP vor. Bei der Identifizierung zueinander ähnlicher Dreiecke in den mit Hilfe von DFK- und KI-Gebäuden aufgebauten Triangulationsnetzen konnten von den $n = 63.852$ KI-Gebäuden schließlich $m = 44.830$ Gebäude als identische Punkte (Anschlusspunkte) definiert werden.

Sowohl die identifizierten m -Anschlusspunkte als auch die verbleibenden $(n - m)$ -KI-Gebäude können als Ausgangsdaten für das nun mit einem verdichteten Netz arbeitende Ortra-Gesamtsystem mit Hilfe einer speziellen Schnittstelle, der Shewchuk-Schnittstelle² (Cheng et al. 2012), an das Ortra-Membranverfahren übergeben und ausgeglichen werden. Für die Lösung der vermittelnden Ausgleichung über Sparse-Matrizen stehen mehrere numerische Verfahren zur Verfügung (vgl. Kap. 4). Ein weiteres Python-basiertes Verfahren benötigt für die insgesamt $255.408 \cong 4n$ Unbekannten, wiederum auf Basis von Sparse-Matrizen mittels SciPy auf der CPU eines einfachen Servers³ 23 Sekunden und auf Basis der Cholmod-Bibliothek auf einem leistungsstärkeren KI-Server⁴ 3 Sekunden. Eine gemeinsame Auswertung von Anschluss- und Massepunkten mittels des Ortra-Membranverfahrens hat den Vorteil, dass für eine anschließende Orthorektifizierung des Satellitenbildes das verdichtete Netz mit Restklaffungsvektoren zur Verfügung steht. Zudem lassen sich die Ergebnisse der Orthorektifizierung auch an den Massepunkten durch einen Koordinatenvergleich quantifizieren.

2 <https://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
 3 2,5 GHz CPU, 3,9 GHz in der Spitze, 2 Intel Xeon Gold 6248 GPUs, 20 Kernen, 40 Hardwarethreads, 64 GB RAM
 4 8 A100-GPUs von NVidia, 96 Kerne, 125 GB RAM

3.1 Koordinatenwidersprüche in den Anschlusspunkten vor und nach dem Ortra-Membranverfahren

Neben der Anwendung des Ortra-Membranverfahrens lassen sich die bestehenden Koordinatenwidersprüche an den Anschlusspunkten der Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ beispielsweise in einfacher Weise über eine globale Helmerttransformation im Modell der Bedingten Ausgleichung mit Unbekannten:

$\min_{\Delta x} (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})$ mit $\mathbf{w} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{v} = 0$ bestimmen. Dabei sind die Anschlusspunkte, korrespondierend zu der in (Großmann 1969) beschriebenen Verfahrenslösung, auf den Schwerpunkt (x_s, y_s) zu reduzieren und gemeinsam mit den Transformationsparametern $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_4)^T$ in (1) einzusetzen:

$$\Delta \mathbf{r}_j^H = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 \\ -\hat{t}_2 & \hat{t}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - x_s \\ y_j - y_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Die aus der Helmerttransformation resultierenden Restklaffungen $\Delta \mathbf{r}_j^H \in \mathbb{R}^2, j = 1, \dots, m < n$ sind an den $m = 44.830$ Anschlusspunkten als Strecken im Histogramm der Abb. 3 (oben) dargestellt. 74,2 % der Punkte haben Restklaffungen unter 4 m (entspricht 1 Pixel) und 0,9 % der Punkte größer 12 m. Der Mittelwert beträgt 3,22 m und die Standardabweichung $\sigma = \pm 2,60$ m. Ein ähnliches Bild, aber mit einer geringfügig anderen Verteilung ergibt sich über die mittels Ortra-Membranverfahren aus (13) an den Anschlusspunkten als Strecken aufgetragenen Restklaffungen (vgl. Abb. 3 Mitte). Die statistischen Werte zeigen für den räumlich begrenzten Bereich von Ansbach in beiden Verfahren nahezu dieselben Werte, obwohl die Beträge im Histogramm variieren. Die Identitäten im Mittelwert und nahezu auch in

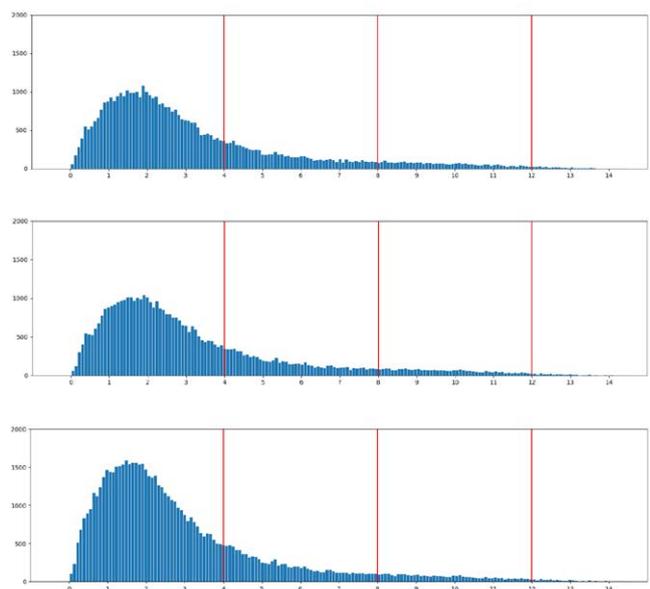


Abb. 3: Restklaffungen an den $m = 44.830$ Anschlusspunkten nach Helmert (oben), aus dem Ortra-Membranverfahren (Mitte) und an allen $n = 63.852$ KI-Gebäudepunkten (Anschluss- und Massepunkte)

der Standardabweichung von $\sigma = \pm 2,59$ m liegen zudem in den sehr geringen Unterschieden der stochastischen Modelle beider Verfahren begründet. Damit sind die aus dem Helmert-Ansatz ermittelten Transformationsparameter gute Näherungswerte für iterative Ausgleichsverfahren – wie GMRES (vgl. Kap. 4.) – zur Lösung des Ortra-Membranverfahrens.

Die gemeinsame Ausgleichung von Anschluss- und Massepunkten über das Ortra-Membranverfahren liefert gegenüber dem Helmert-Ansatz zusätzlich Restklaffungen an den Massepunkten. Abb. 3 (unten) zeigt, dass das Ortra-Membranverfahren zu minimalen Restklaffungen führt. 78,4 % der Punkte haben Restklaffungen unter 4 m und 0,6 % der Punkte größer 12 m. Der Mittelwert beträgt 2,91 m und die Standardabweichung $\sigma = \pm 2,37$ m. Die systematischen Anteile der Transformation finden sich in der Ausgleichung zwischen der freien Netzausgleichung (\hat{x}_1^+) und dem Startsystem, während die resultierenden Koordinatendifferenzen zwischen der angeschlossenen Netzausgleichung als Zielsystem (\hat{x}_2^+) und der freien Netzausgleichung ($\Delta\hat{w} = \hat{x}_2^+ - \hat{x}_1^+$) ausgleichungstechnisch die zufälligen Fehleranteile der Transformation beschreiben. Daher liefert das Ortra-Membranverfahren mit seinem triangulierten Ortra-Gesamtsystem eine verbesserte Grundlage zur Qualitätssicherung der Anschlusspunkte.

3.2 Vorbereitende Maßnahmen und Optimierung der Triangulation

Voraussetzung für eine Auswertung heterogener Satellitenbilder ist, dass jede Satellitenszene aus den Parametern der äußeren Orientierung mit den On-Board befindlichen Sensoren des jeweiligen Satelliten, wie der Sternkamera

(ω, φ, κ) und dem GPS-Empfänger (X,Y,Z), genähert ins DFK-System nach UTM transformiert werden können.

Der einfachste Anwendungsfall zur Auswertung von Fernerkundungsdaten ist die Betrachtung einer einzelnen Satellitenszene bzw. parallel verlaufender Szenen, die zur automatisierten Detektion von Anschlusspunkten über Delaunay-Triangulationen in aneinandergereihte Bilder zu unabhängigen Rechenblöcken zerlegt werden, sodass jedes Bild der Szene unabhängig vom Netz des benachbarten Bildes und unabhängig von der Szene des Flugstreifens des benachbarten Satelliten ist (vgl. Abb. 4a). Die Längen der Bilder je Szene können sowohl innerhalb der Szene als auch zwischen den Szenen variieren. Sie sollten jedoch mindestens so lang wie breit sein und maximal so lang, wie die Erdkrümmung in Bezug auf die Bodenauflösung vernachlässigt werden kann. In der angestrebten Demonstrationmission liegt die Spannweite damit zwischen 15,5 km und 78,5 km. Eine variable Länge der Bilder kann bei wolkenigen Szenen im Rahmen der Auswertung von Vorteil sein. Anschließend lassen sich sowohl sämtliche Rechenblöcke einer Szene als auch parallele Szenen über eine einzige Gesamt-Triangulation, die die identifizierten Anschlusspunkte in den detektierten KI-Gebäudeschwerpunkten enthält, in Beziehung setzen (vgl. Abb. 4b).

Der zweite Anwendungsfall entspricht der Situation sich überlappender Szenen, sodass Anschlusspunkte aus verschiedenen Szenen im Überlappungsbereich existieren können. Ein notwendiger Schritt zur späteren Orthorektifizierung ist die eindeutige Zuordnung der im Satellitenbild identifizierten KI-Gebäudeschwerpunkte zum jeweiligen Bild der Szene. Dies kann beispielsweise durch Vergabe einer eindeutigen ID je Bild und Szene erfolgen, die als zusätzliches Attribut an jedem Gebäudeschwerpunkt angefügt wird, unabhängig davon, ob die Gebäudeschwerpunkte

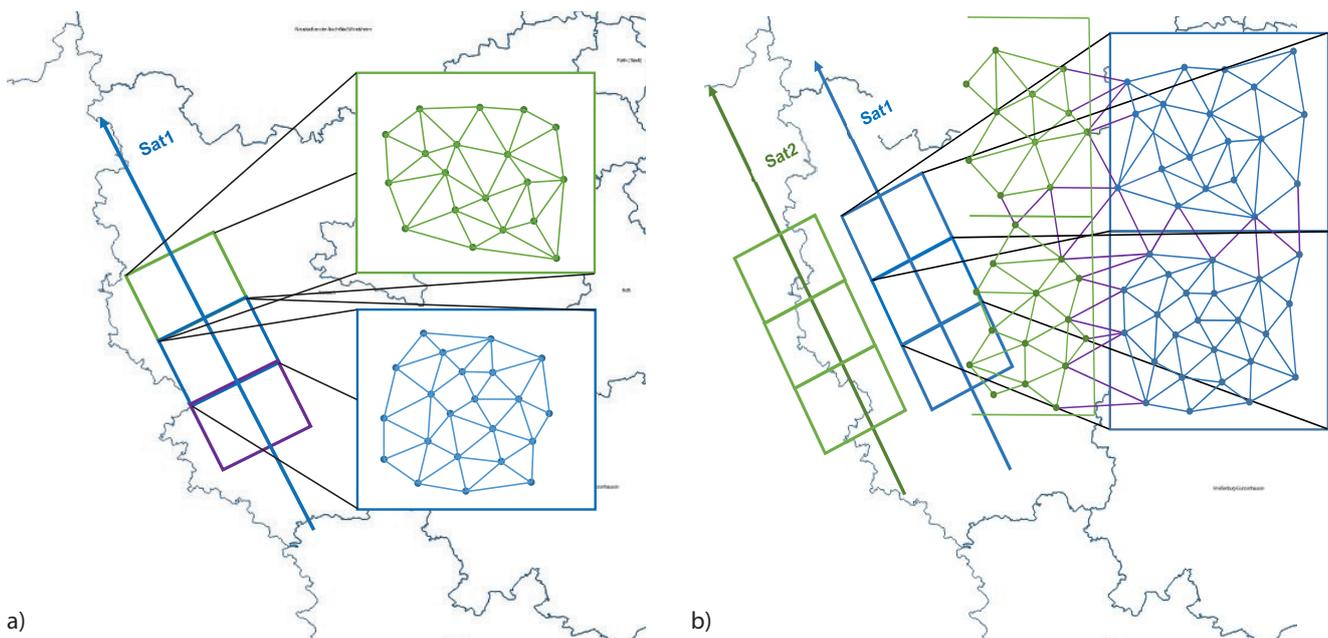


Abb. 4: (a) Zerlegung einer Satellitenszene eines Satelliten in unabhängige Rechenblöcke zur automatisierten Detektion von Anschlusspunkten, (b) gemeinsame Triangulation paralleler Szenen ohne Überlappung

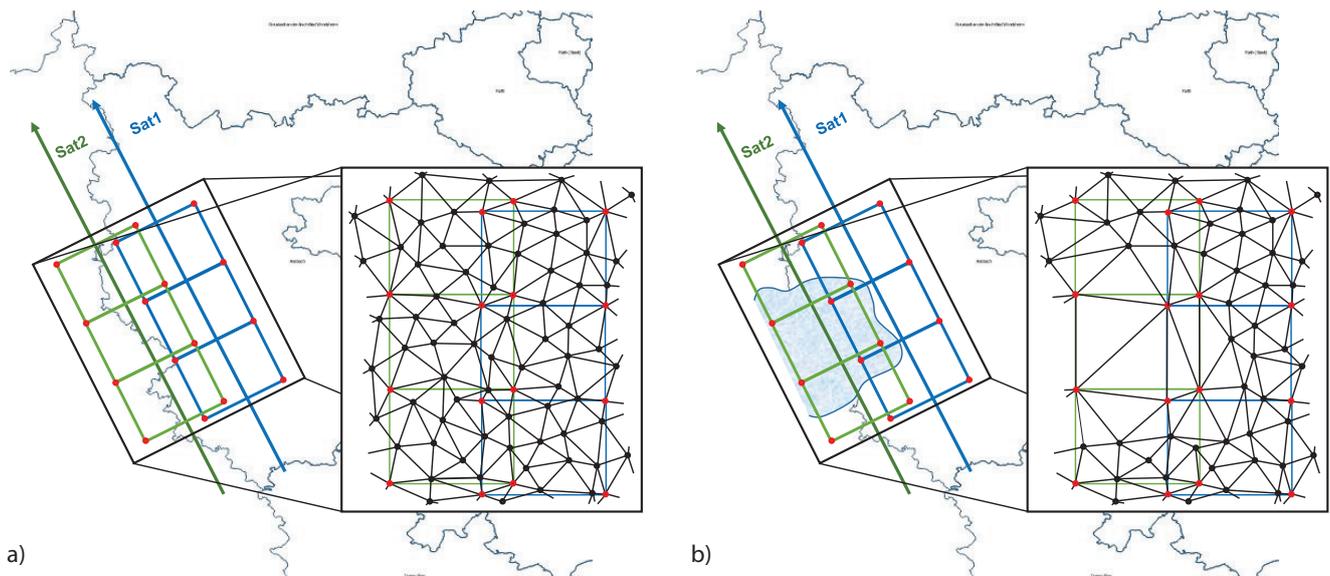


Abb. 5: (a) Fusionierung überlappender Bilder zu einem triangulierten Ortra-Gesamtsystem ohne Wolken, (b) Extrapolation bei Wolken zur gemeinsamen Orthorektifizierung

als Anschlusspunkte identifiziert werden oder als Massepunkte verbleiben. Wird vor der Bestimmung der Anschlusspunkte ein und dasselbe Gebäude in mehreren Bildern detektiert und über einen minimalen Abstand von einem Pixel der Bodenaufösung als identischer Gebäudeschwerpunkt identifiziert, so sind Doppelungen mit kleineren Flächen zu löschen. Für eine landesweite Orthorektifizierung sind in Analogie zur photogrammetrischen Bündelblockausgleichung sämtliche in den Rechenblöcken automatisiert detektierten Anschlusspunkte aller Satellitenzenen gemeinsam mit allen Massepunkten (das sind hier nur die KI-Gebäude, die nicht Anschlusspunkte sind und die Blattecken der zugeschnittenen Satellitenbilder) in einem Dreiecksnetz als Ortra-Gesamtsystem zu triangulieren (vgl. Abb. 5). Die anschließende Ausgleichung über das Ortra-Membranverfahren liefert für alle Massepunkte Koordinaten im DFK-System und transformiert zugleich das im KI-System triangulierte Netz ins DFK-System.

Da beim Ortra-Membranverfahren eine Analogie zum Finite-Elemente-Verfahren besteht, kann für die Orthorektifizierung von Satellitenbildern das zur Ausgleichung triangulierte Ortra-Gesamtsystem zur Minimierung von Verzerrungen durch die Einführung von Steiner-Punkten (Neuberg, 1886, s.a. Honsberger, 1995) als Massepunkte optimiert werden. Die Einführung von Steiner-Punkten dient dazu, möglichst ähnliche Dreiecke bei der Triangulation bilden zu können, um für anschließende Interpolationen die Verzerrungsenergien zu minimieren.

Nach der Theorie der finiten Elemente führt die feinere Unterteilung eines von Verzerrungen betroffenen Netzgebiets zu einer genaueren Annäherung des Verzerrungsverhaltens. Koordinatendifferenzen in identischen Punkten führen zu Netzspannungen in einem Dreiecksnetz. Für das von Netzspannungen betroffene Gebiet wird eine weitere Netzverdichtung über zusätzliche Steiner-Punkte durchgeführt, um eine Unterteilung des Gebiets in kleinere Dreiecke zu erreichen. Die Qualität des entstehenden feineren

Dreiecksnetzes lässt sich nach (Shewchuck 1997) über die Mindestgröße von Dreieckswinkeln parametrisieren. In (Shewchuck 2014) wurde allerdings gezeigt, dass nicht in allen Fällen eine Delaunay-Triangulation, z.B. mit dem Refinement-Algorithmus von Ruppert, gelingt, wenn nicht als Qualitätsfaktor eine Mindestgröße für alle Dreieckswinkel von $26,5^\circ$ vorgegeben ist. Dies konnte für geodätische Netze nicht verifiziert werden.

Eine maßvoll durchgeführte Netzverdichtung der Delaunay-Triangulation über den Qualitätsparameter der Dreieckswinkel-Mindestgröße von 20° , die im Folgenden mit »Q20« abgekürzt wird, führt für den in Kap. 3 angesprochenen Datenbestand von Ansbach zu 101.488 triangulierten Punkten. Abzüglich der $n = 63.852$ Gebäudepunkte, von denen $m = 44.830$ Anschlusspunkte sind, ergeben sich 37.636 Steiner-Punkte. Bei einer Verdichtung des Ausgangsnetzes über den Qualitätsparameter Q25 und Q28 wächst die Anzahl auf 65.885 bzw. 94.282 Steiner-Punkte. Die Erzeugung der Steiner-Punkte kann während der Ausgleichung über die Triangle-Python-Schnittstelle (<https://ruat.be/triangle/>) ausschließlich im Hauptspeicher erfolgen.

Die durch Steiner-Punkte optimierte Triangulation hat über das gesamte Netz folgende Eigenschaften:

- Es werden nur Kanten gelöscht.
- Dreieckspunkte bleiben erhalten.
- Spitzwinklige Dreiecke und Dreiecke mit großen Seitenlängen werden verdichtet und bilden eine optimierte Datengrundlage für weiterführende Interpolationsverfahren – wie die Sibson-Interpolation.

Die Wirkungsweise der Steiner-Punkte kann nach der Ausgleichung über das Ortra-Membranverfahren anhand der im KI-System gegebenen Massepunkte durch einen Vergleich der Restklaffungen bewertet werden. Bei einer Netzausgleichung mit Zwangsanschluss bleiben die Restklaffungen an den Anschlusspunkten unverändert. Werden

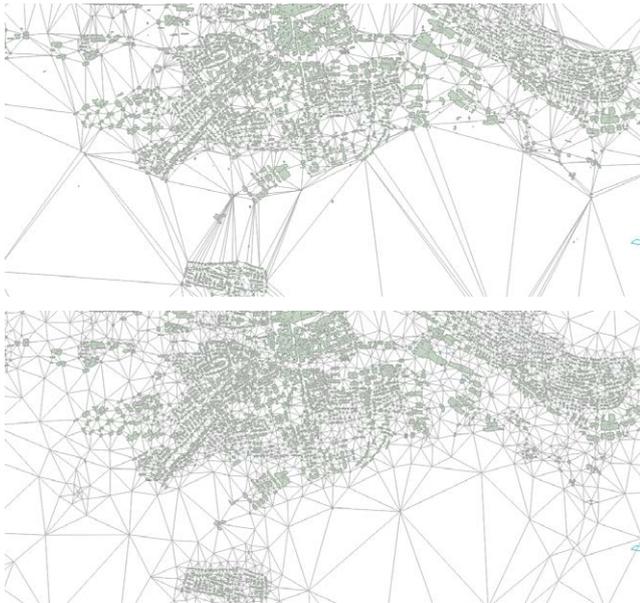


Abb. 6: Auswirkungen der Steiner-Punkte: Originale Triangulation (oben); mit Steiner-Punkten ergänzte, optimierte Triangulation (unten)

Mittelwerte und ihre Standardabweichung an allen Massepunkten (d.h. den 19.022 Massepunkten aus dem Ortra-Membranverfahren zuzüglich der in Abhängigkeit des Qualitätsfaktors bestimmten Steiner-Punkte) berechnet, dann zeigen Untersuchungen durch Variation der Anzahl an Steiner-Punkten in Verbindung mit der Konditionszahl κ der Normalmatrix $\kappa(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}) = \kappa((\mathbf{C}_2 \mathbf{A})^T \mathbf{C}_2 \mathbf{A})$ der angeschlossenen Netzausgleichung (vgl. 2.2.2), dass die Mittelwerte monoton fallen und eine stetige Verbesserung durch die Einführung von Steiner-Punkten erzielt wird. Hieraus ergibt sich folgende Gesetzmäßigkeit: Die Ausgleichung mittels Ortra-Membranverfahren eines durch Steiner-Punkte verdichteten Netzes verteilt die von den Anschlusspunkten induzierten Netzspannungen auf eine größere Anzahl von Netzpunkten – ganz im Sinne einer nachbarschaftstreu Interpolation.

Der damit verbundene Rechenaufwand kann mit den bereits zur Verfügung stehenden Ansätzen zur Lösung von Gleichungssystemen bewältigt werden (vgl. Kap. 4). Für die optimierte Konfiguration Q20 mit 405.952 Unbekannten erhöhte sich die Rechenzeit auf der CPU des KI-Servers von drei auf acht Sekunden – darin eingeschlossen ist die Rechenzeit für das Ein- und Auslesen der ASCII-Dateien. Mit diesem um Steiner-Punkte optimierten Ortra-Gesamtsystem lassen sich nach der angeschlossenen Netzausgleichung (15) geeignete Interpolationsverfahren zur Orthorektifizierung der Satellitenbilder anwenden.

3.3 Verfahren zur Orthorektifizierung

Bei der Orthorektifizierung kehren sich Start- und Zielsystem um: Ausgehend von einem in UTM definierten regelmäßigen Raster wird für jeden Rastermittelpunkt die zugehörige Bildkoordinate im Satellitenbild-System gesucht,

um für diese Rasterzelle die Radiometrie aus dem Satellitenbild bzw. den Satellitenbildern zu entnehmen. Für die Orthorektifizierung von Rasterbildern werden folgende Ansätze untersucht:

- Ein Ortra-Gitter-Ansatz, der im Anschluss an das Ortra-Membranverfahren für unbekannte Gitterpunkte ein Modell eines regelmäßigen, mechanisch versteiften Gitters einführt. Zur exakten Bestimmung der Gitterwerte wird die bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters eingesetzte NTV2-Methode (Ahrens und Böhmer 2010) angewendet (Glock 2021). Dieser Ansatz dient zugleich als Referenz für die verbleibenden Verfahren.
- Ein Sibson-Koordinaten-Interpolationsverfahren (Sibson 1980, 1981, Farin 1990), das Restklaffungen anhand von Dreieckseckpunkten des optimiert triangulierten Ortra-Gesamtsystems interpoliert sowie ergänzend eine Interpolation mittels Voronoi-Diagrammen durchführt.
- Interpolation mit dem nächstgelegenen Ortra-System.

3.3.1 Ortra-Gitter-Ansatz

Zwischen den Pixelmittelpunkten des orthorektifizierten Satellitenbildes $\mathbf{m}_i(x_i, y_i)$ werden Beobachtungen im Ausgleichungsmodell des Ortra-Gitter-Ansatzes (einem Spezialfall des Ortra-Verfahrens) definiert. Sie bilden somit die Grundlage zur Auflösung der unbekannt Bildkoordinaten im Koordinatensystem des Satellitenbildes. Für die Vernetzung der Pixelpunkte untereinander im Zielbild des entzerrten Satellitenbildes wird jeweils eine achtfache Nachbarschaft zu den umliegenden Bildpunkten definiert (Abb. 7, linkes Bild). Für die Definition der Beobachtungen vom mittleren Pixelpunkt zu seinen benachbarten Pixelpunkten wird erneut die Grundformel des Ortra-Verfahrens (4) eingesetzt.

Abb. 7 rechts zeigt beispielhaft eine Beobachtungsdefinition des Ortra-Gitter-Ansatzes zu Anschlusspunkten (grüne Punkte) und zu den Gitterpunkten $\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)$ des Orthorektifizierungs-Gitters im DFK-System (rote Punkte) auf, bei der die Gitterpunkte durch die achtfache Nachbarschaft auch stets diagonal vernetzt werden. Anschlusspunkte außerhalb des Gitters bleiben unberücksichtigt. Die mit (15) aus dem Ortra-Membranverfahren bestimmten

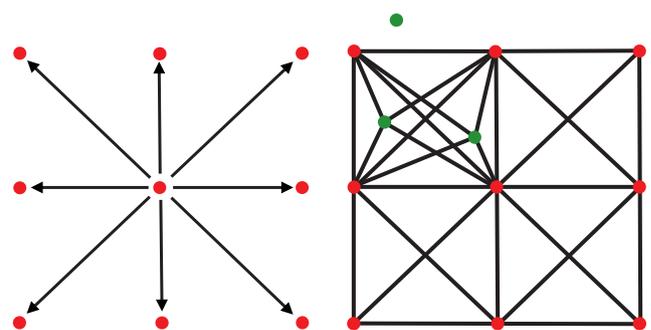


Abb. 7: Ausgleichung zur Orthorektifizierung: Beobachtungsaufbau im DFK-System für die subpixelgenaue Berechnung von Bildkoordinaten im KI-System des Satellitenbildes

Eckpunkte der Satellitenbilder sind im Ortra-Gitter-Ansatz ebenfalls Anschlusspunkte; sie fallen in der Regel in das Orthorektifizierungs-Gitter (rote Punkte) und werden ebenfalls nach dem Ortra-Gitter-Ansatz verknüpft. Die Anschlusspunkte stellen bekanntlich Passpunkt-Koordinaten im Satelliten-Ausgangsbild und im orthorektifizierten Satelliten-Zielbild zur Verfügung. Die Orthorektifizierung kann nach der Ausgleichung durchgeführt werden, wenn für alle Pixel-Massepunkte korrespondierende Koordinaten im Start- und Zielsystem vorliegen. Die aufgebaute Steifigkeit des Pixelpunkt-Gitters trägt zur Minimierung von Bildverzerrungen bei der Orthorektifizierung bei, wenn für einen bestimmten, auch größeren Bildbereich keine Anschlusspunkte vorliegen (z.B. bei Verdeckung durch Wolken).

Die Bildkoordinaten der Rasterzelle $\mathbf{m}_i(x_i, y_i)$ aus dem Ortra-Gitter-Ansatz werden im KI-System des Satellitenbildes mit $\mathbf{m}_i^g(x_i, y_i)$ bezeichnet und ergeben sich bei umgekehrter Reihenfolge von Start- und Zielsystem direkt aus dem in 2.2.3 bestimmten Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}_2^+ = (\hat{\mathbf{x}}_0^T, \hat{\mathbf{x}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{x}}_n^T)^T$ zu:

$$\mathbf{m}_i^g(x_i, y_i) \in \hat{\mathbf{x}}_0 = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (18)$$

Die Berechnung der freien Netzausgleichung $\hat{\mathbf{x}}_1^+$ ist beim Ortra-Membran-Verfahren somit nicht erforderlich.

3.3.2 Sibson-Koordinaten-Interpolationsverfahren

Im Unterschied zum Ortra-Membranverfahren, das wegen der Realisierung geometrischer Bedingungen im funktionalen Ansatz zu den geschlossenen Transformationsverfahren gehört, zählt die Sibson-Interpolation ebenso wie der Ortra-Gitter-Ansatz zu den hierarchischen Verfahren, indem zunächst Interpolationsgewichte bestimmt werden und anschließend eine Interpolation punktspezifisch durchgeführt wird. Das auf Voronoi-Diagrammen basierende nachbarschaftstreue Sibson-Interpolationsverfahren ist linear und, bei Verwendung affin invarianter Metriken, invariant gegenüber affinen Transformationen (Roschlaub

1999). Die Berechnung der Interpolationsgewichte nach Sibson erfolgt durch eine Verschneidung konvexer Mengen; im einfachsten Fall durch Dreiecke (vgl. Abb. 8). Das von (Sibson 1980, 1981) entwickelte Natural-Neighbour-Interpolationsverfahren wurde von (Hettwer und Benning 2003) aufgegriffen und durch (Burkhardt 2004) algorithmisch ausformuliert. Ein weiterer nachbarschaftstreuer Ansatz ist in (Wieser et al. 2003) dargestellt.

Zur Interpolation der Rasterbilder werden im Fall der Dreiecksinterpolation im Koordinatensystem der DFK zunächst Interpolationsgewichte für jeden Rastermittelpunkt (Massepunkt) $\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)$ aus den Dreieckseckpunkten $\mathbf{p}_1(\hat{X}_1, \hat{Y}_1)$, $\mathbf{p}_2(\hat{X}_2, \hat{Y}_2)$, $\mathbf{p}_3(\hat{X}_3, \hat{Y}_3)$ mit den ausgeglichenen DFK-Koordinaten der angeschlossenen Netzkonfiguration (15) bestimmt. Geometrisch werden dazu, unabhängig von der programmtechnischen Umsetzung, zunächst die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten gebildet (Abb. 8a). Anschließend wird der Massepunkt mit den Dreieckseckpunkten verbunden und die zugehörigen Mittelsenkrechten bestimmt, deren Schnittpunkte wiederum ein Dreieck bilden (Abb. 8b). Die Fläche wird mit $F(\mathbf{m}_i)$ bezeichnet und ist abhängig von der Lage des Massepunktes \mathbf{m}_i . Durch das Verschneiden der Mittelsenkrechten des Ausgangsdreiecks (Abb. 8a) mit der Dreiecksfläche $F(\mathbf{m}_i)$ (Abb. 8b) entstehen, bezüglich der Dreieckseckpunkte, drei Dreiecksteilflächen $F(\mathbf{p}_1)$, $F(\mathbf{p}_2)$, $F(\mathbf{p}_3)$ (vgl. Abb. 8c). Die Interpolationsgewichte $u_k(\mathbf{m}_i) \in [0,1]$:

$$u_k(\mathbf{m}_i) = \frac{F(\mathbf{p}_k)}{F(\mathbf{m}_i)} \quad \text{für } k=1, \dots, 3 \quad (19)$$

nennt man *lokale* oder *Sibson-Koordinaten* des Punktes \mathbf{m}_i .

Für den Fall der Dreiecksinterpolation lassen sich die Interpolationsgewichte aus den nichtkollinearen Dreieckseckpunkten alternativ in Matrixschreibweise darstellen:

$$\begin{pmatrix} u_1(\mathbf{m}_i) \\ u_2(\mathbf{m}_i) \\ u_3(\mathbf{m}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 \\ \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 & \hat{Y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

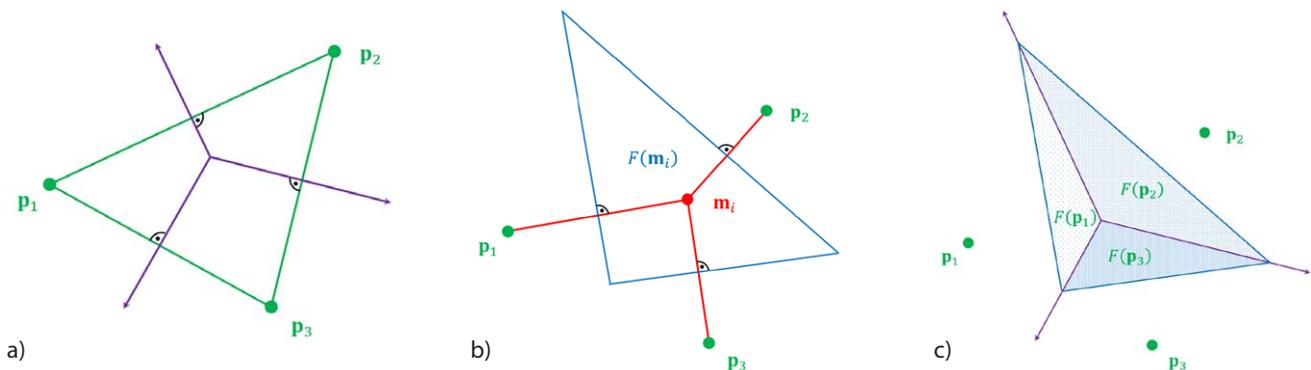


Abb. 8: Sibson-Interpolation: (a) Ausgangsdreieck (grün) mit Mittelsenkrechten (lila) (b) Triangulierter Massepunkt (rot) mit zugehörigen Mittelsenkrechten (blau) (c) Dreiecksteilflächen für den Massepunkt je Dreieckseckpunkt durch Überlagerung der Mittelsenkrechten (blau, lila) aus den resultierenden schraffierten Flächen

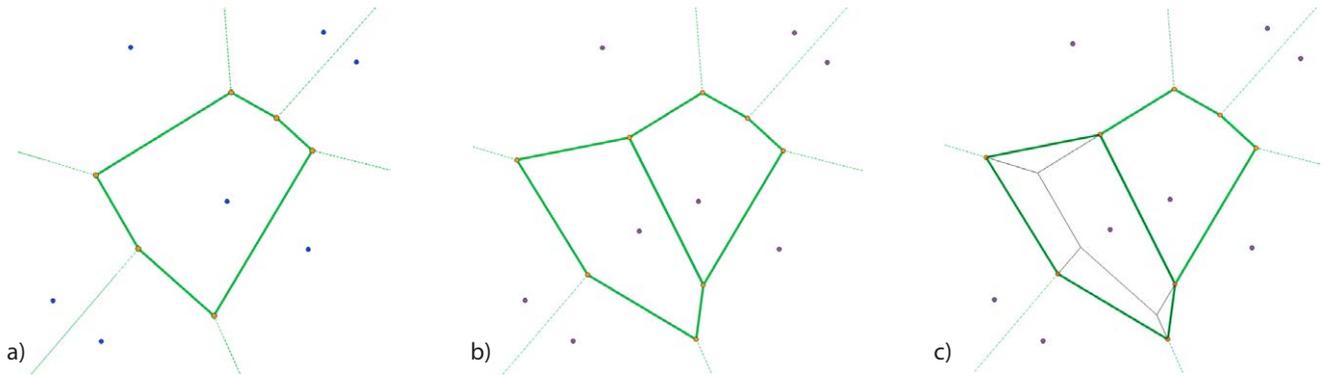


Abb. 9: Allgemeine Sibson-Interpolation mittels Voronoi-Diagrammen für mehr als drei Punkte im \mathbb{R}^2 ; (a) Ausgangs-Diagramm, (b) mit Interpolationspunkt und (c) Überlagerung mit fünf Interpolationsgewichten

In (20) können, falls nötig, zur Verbesserung der Kondition der zu invertierenden Matrix sämtliche Koordinaten auf den jeweiligen Dreiecksschwerpunkt reduziert werden. Falls ein Interpolationspunkt auf einer der Dreiecksseiten liegt, dann liefert (20) zwischen Anfangs- und Endpunkt linear interpolierte Gewichte und für den dritten Dreieckseckpunkt den Wert null. Hat eines der Gewichte Werte größer eins oder kleiner null, dann liegt der zu interpolierende Punkt außerhalb des Dreiecks. Mit $\sum_{k=1}^3 |u_k| = 1$ können alle im selben Dreieck zu interpolierenden Massepunkte bzw. Rasterzellen $\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)$ identifiziert und mit derselben (konstanten) inversen Matrix berechnet werden.

Mit (20) lassen sich Restklaffungen an den Dreieckseckpunkten $\Delta\hat{\mathbf{w}}_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, \dots, 3$ für die im Dreieck liegenden Massepunkte $\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)$ über die DFK-Koordinaten aus den Sibson-Koordinaten berechnen:

$$\Delta\mathbf{r}_i^s(\Delta X_i, \Delta Y_i) = \sum_{k=1}^3 u_k(\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)) \cdot \Delta\hat{\mathbf{w}}_k. \quad (21)$$

Im vorliegenden Fall liegen die DFK- und die KI-Koordinaten im selben übergeordneten UTM-Koordinatensystem. Daher können in (21) die Restklaffungsvektoren $\Delta\hat{\mathbf{w}}_k \in \mathbb{R}^2$ an den Dreieckseckpunkten aus den Differenzen zwischen den KI-Koordinaten und den über das Ortra-Membranverfahren nach Kap. 2.2.3 ausgeglichenen DFK-Koordinaten der angeschlossenen Netzkonfiguration (15) gebildet werden:

$$\Delta\hat{\mathbf{w}}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{Y}_k \end{pmatrix}, \text{ für } k = 1, \dots, 3. \quad (22)$$

Die Entnahme der Radiometrie-Werte für die Position $\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)$ in der DFK erfolgt im Satellitenbild an der Stelle $\mathbf{m}_i^s(x_i, y_i)$:

$$\mathbf{m}_i^s(x_i, y_i) = \mathbf{m}_i(X_i, Y_i) + \Delta\mathbf{r}_i^s(\Delta X_i, \Delta Y_i). \quad (23)$$

Vereinfachung: Nachdem die Sibson-Koordinaten invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen sind, kann in einfacher Weise mit den im DFK-System ermittelten

Interpolationsgewichten, über die KI-Dreieckseckpunkte $\mathbf{p}_k(x_k, y_k)$ die Position der Rasterzelle im KI-System direkt ermittelt werden:

$$\mathbf{m}_i^v(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^3 u_k(\mathbf{m}_i(X_i, Y_i)) \cdot \mathbf{p}_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Verallgemeinerung: Die Formeln (21) bis (24) gelten analog für mehr als drei Punkte (d.h. für $k > 3$). Für eine allgemeine Sibson-Interpolation mit mehr als drei Punkten im \mathbb{R}^2 ist zur Bestimmung der Interpolationsgewichte, anstelle der Matrizendarstellung (20), die Berechnung von Voronoi-Diagrammen notwendig (vgl. Abb. 9). Im Rahmen der Orthorektifizierung werden Massedaten verarbeitet, die eine effiziente Implementierung der Voronoi-Diagramme erfordern, die z.B. mit Hilfe der Python-Bibliothek in SciPy-Spatial⁵ erfolgen kann, bei der die Rechenlast laufzeitoptimiert auf die zur Verfügung stehenden Rechenkerne und CPUs verteilt wird. Trotz der zur Verfügung stehenden Python-Bibliothek bleibt die zu implementierende Berechnung der zweidimensionalen, lokalen Sibson-Koordinaten eine Herausforderung. Mit der JAVA-basierten Tinfour-Bibliothek steht eine performante Implementierung zur Berechnung der Interpolationsgewichte bereit (Lucas 2021a, 2021b), die mittels einer Bowyer-Watson-Hülle einer Variation des Ansatzes von Robert Sibson (Sibson 1981) entspricht, und zu gleichen Interpolationsergebnissen führt. Im Projekt ist zur Automation des Gesamtprozesses eine Implementierung in Python notwendig, sodass die Tinfour-Bibliothek hier nicht zur Anwendung kam.

Anmerkungen: Die Ergebnisse von (23) und (24) sind nur bei Dreiecksinterpolationen identisch, da die durch das Ortra-Membranverfahren ausgeglichenen Koordinaten der Voronoi-Diagramme in der Regel keiner strengen Ähnlichkeitstransformation bzw. affinen Abbildung folgen, während sich bei Dreiecksparen stets eine affine

⁵ <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.spatial.Voronoi.html>

Abbildung eindeutig bestimmen lässt. Grundsätzlich können in (21) beliebige Restklaffungen $\Delta \hat{x}_k \in \mathbb{R}^2$ eingesetzt werden, beispielsweise die aus (12) bzw. (13) ermittelten Restklaffungen $\Delta \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ des Ortra-Membranverfahrens. Dann sind die DFK-Koordinaten der angeschlossenen Netzausgleichung als Startsystem zu wählen und als Zielsystem die KI-Koordinaten der freien Netzausgleichung. Die Koordinatenwerte des so gewählten Systems sind in (23) und (24) einzusetzen, sodass bei der Dreiecksinterpolation die Invarianz zwischen beiden Netzausgleichungen gewahrt bleibt. In allen anderen Fällen ist nur (23) zu verwenden. Zur Orthorektifizierung empfiehlt es sich aus numerischen Gründen, sowohl die KI- als auch die DFK-Koordinaten auf einen gemeinsamen Schwerpunkt oder auf die linke untere Ecke der Rechenkachel zu reduzieren. Für die Sibson-Interpolation mittels Voronoi-Diagrammen wird zur Erhaltung der Delaunay-Bedingungen zusätzlich empfohlen, die Triangulation im DFK-System vor der Interpolation neu zu bestimmen, da sich nach der Ausgleichung partielle Änderungen (ein sog. »flipping« (Ledoux und Gold 2005)) in der Triangulation ergeben können.

3.3.3 Interpolation mit dem nächstgelegenen Ortra-System

Mit dem zum Massepunkt $\mathbf{m}_i = (X_i, Y_i)^T$ nächstgelegenen Zentrum $\mathbf{p}_k = \{(X_k, Y_k), (x_k, y_k)\}^T$, $k \in \{1, \dots, n\}$ des Ortra-Systems und seinen aus (15) bzw. (16) ermittelten Transformationsparametern $\hat{\mathbf{x}}_k = (\hat{t}_{1_k}, \hat{t}_{2_k})^T$ kann durch Umstellung von (2) nach den KI-Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{1_k} & -\hat{t}_{2_k} \\ \hat{t}_{2_k} & \hat{t}_{1_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_k \\ Y_i - Y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \tag{25}$$

der Rastermittelpunkt $\mathbf{m}_i(x_i, y_i)$ ins KI-Startsystem transformiert werden. Die aus dem Ortra-Membranverfahren für das nächstgelegene Zentrum \mathbf{p}_k durch (12) bzw. (13) ermittelte Restklaffung $\Delta \hat{\mathbf{w}}_k (\Delta \hat{X}_k, \Delta \hat{Y}_k)$ kann durch:

$$\Delta \mathbf{r}_k^z \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{1_k} & -\hat{t}_{2_k} \\ \hat{t}_{2_k} & \hat{t}_{1_k} \end{pmatrix} \cdot \Delta \hat{\mathbf{w}}_k \begin{pmatrix} \Delta \hat{X}_k \\ \Delta \hat{Y}_k \end{pmatrix} \tag{26}$$

im KI-System bestimmt und dem Massepunkt zugewiesen werden, um die Radiometrie-Werte aus dem Satellitenbild an der Stelle:

$$\mathbf{m}_i^z(x_i, y_i) = \mathbf{m}_i(X, Y) + \Delta \mathbf{r}_k^z(\Delta x_k, \Delta y_k) \tag{27}$$

zu entnehmen und auf die DFK-Rasterzelle zu übertragen.

3.4 Analyse zur Wirkungsweise und Güte der Orthorektifizierungsverfahren

Die Wirkungsweise der vorgestellten Verfahren zur Orthorektifizierung von Rasterbildern lässt sich beispielhaft an einem Dreieck demonstrieren, für dessen Eckpunkte die Restklaffungen aus den Koordinatendifferenzen zwischen den aus dem Ortra-Membranverfahren entnommenen ausgeglichenen DFK-Koordinaten und den KI-Koordinaten (vgl. Abb. 10a) gebildet werden. Bei der Orthorektifizierung kehren sich Start- und Zielsystem um und damit einhergehend auch die Orientierung der Restklaffungen, sodass für das in UTM definierte Orthorektifizierungsgitter (vgl. Abb. 10b) Restklaffungen im Zielsystem des Satellitenbildes durch geeignete Verfahren zu bestimmen sind.

Die Interpolation mit dem nächstgelegenen Ortra-System zeigt in Abb. 11a harte Bruchlinien zwischen den Restklaffungen, während die Sibson-Interpolation in Abb. 11b einen fließenden Übergang in Maßstab und Orientierung aufweist. Das Ortra-Gitter-Verfahren hat in Abb. 11c demgegenüber nochmals geringere Restklaffungen. Wegen der schlechten Wirkungsweise wird das Interpolationsverfahren mit dem nächstgelegenen Ortra-System nicht weiter untersucht.

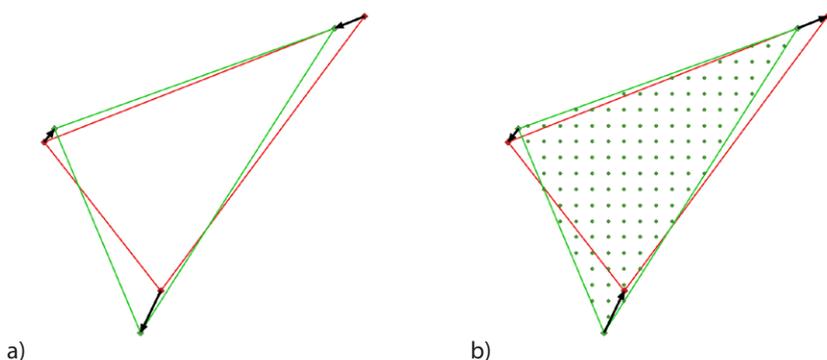


Abb. 10: (a) Restklaffungen (schwarz); Satelliten-daten bilden das Startsystem (rot) und die DFK das Zielsystem (grün); (b) Orthorektifizierungsgitter im UTM-Koordinatensystem mit Umkehrung von Start- und Zielsystem sowie der Orientierung der Restklaffungen.

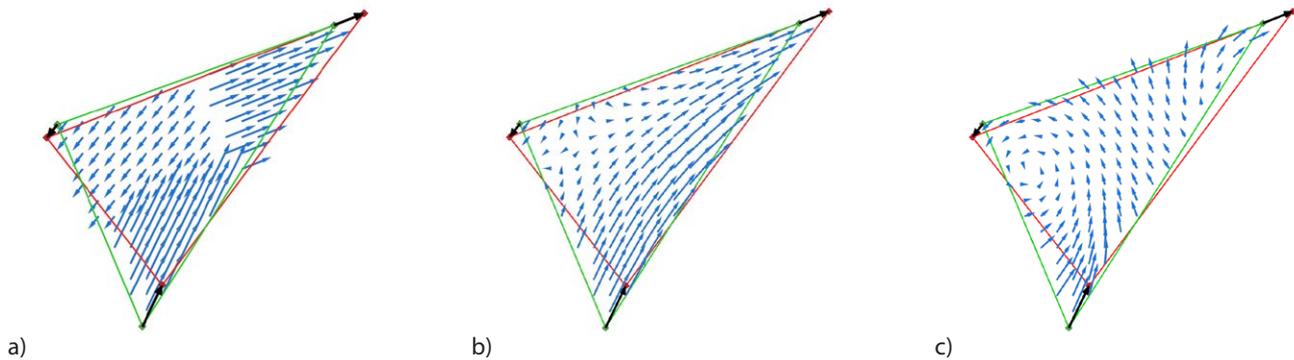


Abb. 11: (a) Interpolation mit dem nächstgelegenen Ortra-System, (b) nach Sibson und (c) dem Ortra-Gitter-Ansatz

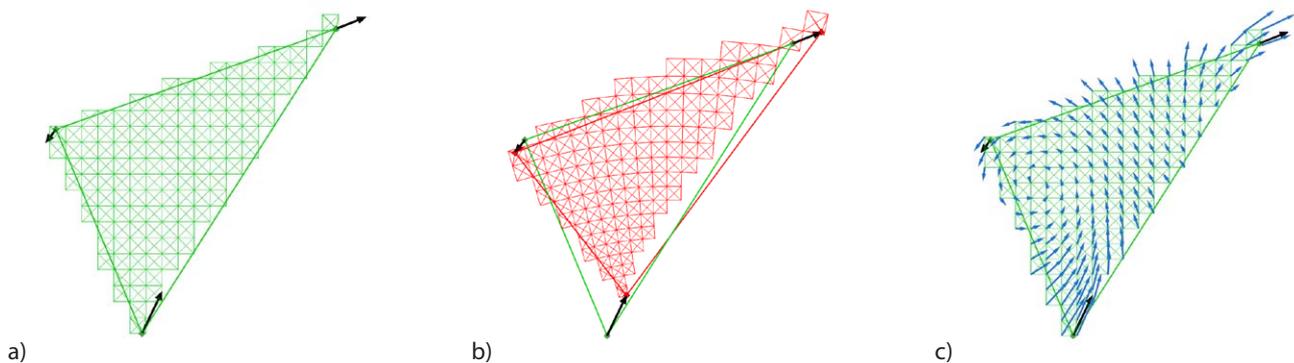


Abb. 12: Prinzip des Ortra-Gitter-Ansatzes im UTM-Koordinatensystem: (a) Beobachtungsaufbau des Orthorektifizierungs-Gitters (grün); (b) Zwangsanschluss an die KI-Koordinaten (rot); (c) Restklaffungen als resultierende Differenzvektoren zwischen dem angeschlossenen Netz (Endpunkte) und dem Orthorektifizierungs-Gitter (Fußpunkte)

3.4.1 Zum Ortra-Gitter-Ansatz

Der Ortra-Gitter-Ansatz ist eine Gitter erhaltende Ausgleichung mit hoher Dämpfung. Die resultierenden Restklaffungen ergeben sich durch Kopplung des Ortra-Gitter-Ansatzes an das Ortra-Membranverfahren, wodurch eine weitere nachbarschaftstreue Verteilung der Ausgangs-Restklaffungen induziert wird. Zur Erläuterung des in Abb. 11c dargestellten Ergebnisses ist in Abb. 12 die Wirkungsweise der Ausgleichung in einzelne Schritte zerlegt. Ausgehend von dem in Abb. 10b definierten Orthorektifizierungs-Gitter ist in Abb. 12a der in Kap. 3.3.1 beschriebene und triangulierte Beobachtungsaufbau des Ortra-Gitter-Ansatzes im Startsystem der DFK visualisiert. Die Ausgleichung des Orthorektifizierungs-Gitters erfolgt mittels Ortra-Membranverfahren als angeschlossenes Netz mit Zwangsanschluss an die Koordinaten der Dreieckseckpunkte im Zielsystem des Satellitenbildes (vgl. Abb. 12b).

Die Restklaffungen des Orthorektifizierungs-Gitters ergeben sich aus den Koordinatendifferenzen zum angeschlossenen Netz, mit Fußpunkten auf das Orthorektifizierungs-Gitter und Endpunkten in die Gitterpunkte des angeschlossenen Netzes (vgl. Abb. 12c). Das Ergebnisbild 11c des Ortra-Gitter-Ansatzes ergibt sich durch das Löschen derjenigen in Abb. 12c dargestellten Restklaffungsvektoren, für die es im Orthorektifizierungs-Gitter der DFK der

Abb. 10b keine korrespondierenden grünen Gitterpunkte gibt.

Der Ortra-Gitter-Ansatz hat folgende Eigenschaften:

- Die Topologie bleibt erhalten: Gitter bleiben Gitter.
- Hohe Dämpfung im Gitter: Größere Restklaffungen in den triangulierten Punkten strahlen kaum auf benachbarte Punkte aus.
- Die Restklaffungen an den angrenzenden Rändern der zugeschnittenen Rechenkacheln sind in der Regel in denselben Positionen verschieden.

Um Verzerrungen am Rand einer Rechenkachel nach der angeschlossenen Netzausgleichung zu vermeiden (vgl. Abb. 13), ist für eine Parallelisierung die Einführung zusätzlicher Punkte im DFK-System entlang der »Schnittlinie« der Rechenkachel notwendig (vgl. Abb. 14). Die durch Steiner-Punkte zusätzlich einzuführenden »Schnittlinien« müssen dabei denselben Punktabstand wie die Gitterpunkte des Orthorektifizierungs-Gitters im DFK-System haben. Für diese Steiner-Punkte der »Schnittlinie« ist in der erweiterten Gewichtsmatrix P^p des stochastischen Modells (10), ebenso wie für Passpunkte, ein unendliches Gewicht von $pp = 10.000$ zuzuweisen, damit die Rechenkacheln nach der Ausgleichung im KI-System nahezu überlappungsfrei aneinandergrenzen. Erst dann kann eine Verdichtung mit weiteren Steiner-Punkten, z. B. in einer Qualitätsstufe

Q20, erfolgen (vgl. Abb. 14). Aufbauend auf dieses Triangulationsnetz liefert die anschließende Ausgleichung des Ortra-Gitter-Ansatzes ein im Vergleich zu Abb. 13 unverzerrtes Ortra-Gitter im KI-System (vgl. Abb. 15).

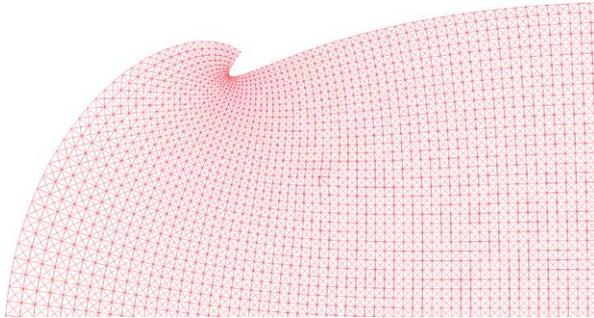


Abb. 13: Verzerrungen des Ortra-Gitters am Rand einer Rechenkachel nach der Ausgleichung im KI-System

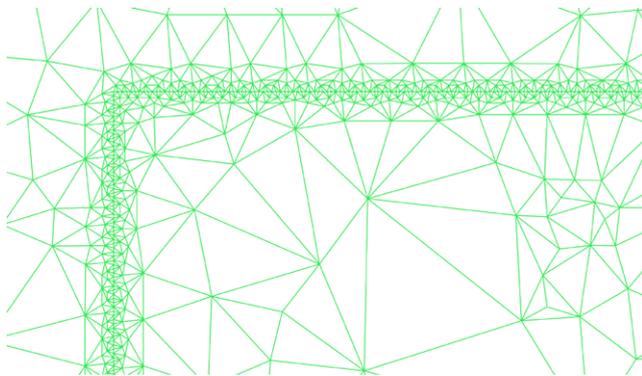


Abb. 14: Einführung von »Schnittlinien« durch Steiner-Punkte: hier am oberen und seitlichen Rand der Rechenkachel im DFK-System und anschließender Optimierung der Triangulation durch eine weitere Verdichtung mit Steiner-Punkten der Qualitätsstufe Q20

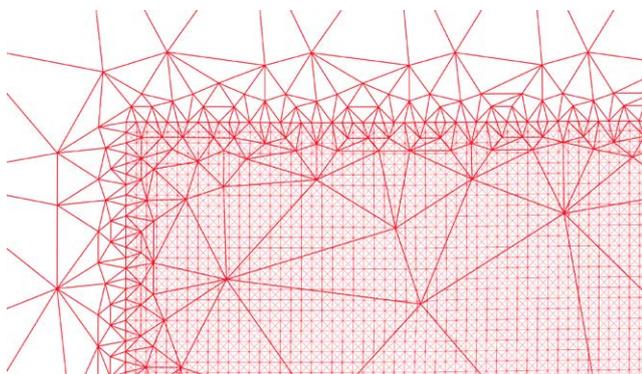


Abb. 15: Unverzerrtes Ortra-Gitter einer Rechenkachel nach Einführung von »Schnittlinien« und Ausgleichung im KI-System auf dem Hintergrund der optimierten Triangulation

3.4.2 Zur Sibson-Dreiecksinterpolation

Das Dreiecks-Interpolationsverfahren nach Sibson hat folgende Eigenschaften:

- Das – die Topologie erhaltende – Interpolationsverfahren ermöglicht eine Parallelisierung der Orthorektifizierung.
- Die Ränder der Rechenkacheln lassen sich nahtlos zusammenschließen. Hierzu sind lediglich sämtliche – durch den im DFK-System frei gewählten Zuschnitt – angeschnittenen Dreiecke bei der Interpolation zu berücksichtigen.
- Das Verfahren gewährleistet am Rand der Rechenkacheln eine eindeutige Entnahme von Radiometrie-Werten aus dem Satellitenbild zur Übertragung auf den zu orthorektifizierenden Bildausschnitt.
- Die Dämpfung der Sibson-Dreiecksinterpolation ist linear und zeigt fließende Übergänge (vgl. Abb. 11b). Sie ist gegenüber dem Ortra-Gitter-Ansatz jedoch etwas geringer (vgl. Abb. 11c).

3.4.3 Zur allgemeinen Sibson-Interpolation via Voronoi-Diagramm

Das ebenfalls die Topologie erhaltende Verfahren interpoliert über die Verbindungslinien der Triangulationen hinweg. Dies führt beim Zusammenfügen der im DFK-System definierten Zuschnitte der Rechenkacheln zu Überlagerungen im Satellitenbild. Bei der Entnahme von Radiometrie-Werten aus dem Satellitenbild ergeben sich entlang der Ränder unterschiedliche Werte. Sie sind davon abhängig, über welchen Zuschnitt sie entnommen werden. Für eine Parallelisierung ist ein entsprechend großer Umgriff um den jeweiligen Zuschnitt im Voronoi-Diagramm vorzunehmen, damit ein nahtloser Übergang zwischen den Ausschnitten gewährleistet wird.

4 Performance und Genauigkeit

Die empirische Genauigkeit und Performance der Orthorektifizierungsverfahren kann am Beispiel eines in einer Gitterauflösung von 4 m zu rektifizierenden 10 km² großen Ausschnitts (vgl. Abb. 6) dargestellt werden. Datengrundlage sind weiterhin die mit und ohne Steiner-Punkte triangulierten Netze des jeweiligen Ortra-Gesamtsystems (vgl. Kap. 3.2) und die aus (22) ermittelten zugehörigen Restklaffungen an den Dreieckseckpunkten.

Für den gewählten Ausschnitt ergeben sich im Modell des Ortra-Gitter-Ansatzes aus den insgesamt 625.000 Gitterpunkten 2,5 Millionen Unbekannte, zzgl. der Unbekannten für die triangulierten Dreieckspunkte, die innerhalb des Ausschnitts liegen, und der aus dem Zuschnitt der Rechenkachel resultierenden Unbekannten für die Steiner-Punkte der »Schnittlinien«. Für eine bayernweite

Tab. 1: Laufzeiten und Restklaffungsbeträge (an den 625 Tsd. Gitterpunkten) des rektifizierten 2 * 5 km² großen Ausschnitts auf einem KI-Server mit 8 A100-GPU von NVidia, 96 Kernen und 125 GB RAM

Interpolationsverfahren	Triangulation ohne Steiner-Punkte			Triangulation mit Steiner-Punkten (Q20)		
	Laufzeit a) CPU SciPy b) CPU (ILU) + GPU GMRES c) CPU Cholmod	arithm. Mittel	Standardabweichung σ	Laufzeit a) CPU SciPy b) CPU (ILU) + GPU GMRES c) CPU Cholmod	arithm. Mittel	Standardabweichung σ
Sibson via Dreiecke	a) 2 min. 36 sec. b) -- c) ---	2,70 m	$\pm 1,48$ m	a) 2 min. 30 sec. b) -- c) ---	2,60 m	$\pm 1,44$ m
Sibson via Voronoi-Diagramme	a) 2 Std. 40 min. b) --- c) ---	2,46 m	$\pm 1,36$ m	a) 4 Std. 59 min. b) --- c) ---	2,55 m	$\pm 1,37$ m
Ortra-Gitter-Ansatz	a) 21 min. 52 sec. b) keine Konverg. c) 1 min. 49 sec.	15,65 m ---	$\pm 49,81$ m ---	a) 22 min. 17 sec. b) keine Konverg. c) 1 min. 47 sec.	4,44 m ---	$\pm 12,93$ m ---
Ortra-Gitter-Ansatz mit Schnittlinien	a) 27 min. 21 sec. b) 6 min. 11 sec.* c) 1 min. 56 sec.	2,17 m 2,18 m	$\pm 0,89$ m $\pm 0,87$ m	a) 26 min. 7 sec. b) 6 min. 27 sec.** c) 1 min. 58 sec.	2,13 m 2,13 m	$\pm 0,99$ m $\pm 0,98$ m

* Davon: 5 min. 34 sec. (CPU) + 37 sec. (GPU)

** Davon: 5 min. 49 sec. (CPU) + 38 sec. (GPU)

Prozessierung der Orthorektifizierung fallen mindestens 17,637 Milliarden Unbekannte an.

Die vorgestellten Verfahren zur Georeferenzierung und Mosaikierung werden üblicherweise auf CPUs berechnet. Die Performance der Sibson-Dreiecksinterpolation liegt fast gleichauf wie der Ausgleichsansatz, der auf Basis der Cholmod-Routinen arbeitet, während die Eigenentwicklung der Sibson-Interpolation über Voronoi-Diagramme in Python dagegen deutlich zurückfällt. Die Sibson-Dreiecksinterpolation ist bei Triangulationen mit Steiner-Punkten der Qualitätsstufe Q20 schneller als ohne Steiner-Punkte (vgl. Tab. 1). Dies liegt darin begründet, dass mit Einführung der Steiner-Punkte Dreiecke mit größeren Innenwinkeln entstehen, wodurch die jeweilige Bounding-Box kleiner und die Anzahl der außerhalb des Dreiecks liegenden Punkte geringer wird. Obwohl die Anzahl der Dreiecke sich durch die Einführung der Steiner-Punkte mehr als verdoppelt, beschleunigt sich die Verarbeitungszeit um das 1,3-Fache.

Der Einsatz von GPUs, wie sie beispielsweise im Bereich der KI zum Einsatz kommen, verspricht eine erhebliche Steigerung der Performance. Die Voraussetzung zur Anwendung von GPUs ist, dass wesentliche Teile der Verfahren durch Matrizenberechnungen erfolgen, sodass im vorliegenden Fall die Sibson-Interpolation ausscheidet und nur der Ortra-Gitter-Ansatz und das Ortra-Membranverfahren für Berechnungen auf der GPU verbleiben. Für gewöhnlich werden Matrizen in Python unter Verwendung der Python-Bibliotheken NumPy und SciPy auf der CPU berechnet. Alternativ hierzu können in Python Matrizen über das OpenSource Produkt CuPy von NVidia sowie der

cuBLAS- und cuSolver-Bibliothek auf der GPU verarbeitet werden (BLAS: Basic Linear Algebra Subroutines).

Die Lösung des Normalgleichungssystems des Ortra-Membran-Verfahrens erfordert bei größeren Gebieten den Einsatz von Sparse-Matrizen, insbesondere bei einer landesweiten Bearbeitung. Die Lösung kann über die in Kap. 2.1.4 vorgeschlagene Cholesky-Zerlegung erfolgen, für die C-Routinen von Cholmod zur Verfügung stehen, die performanter als die Python-Bibliotheken in NumPy und SciPy (Fortran-Routinen) sind. Die numerische Faktorisierung kann sowohl auf der CPU als auch auf der GPU durchgeführt werden (aus <https://people.engr.tamu.edu/davis/publications.html>). Nach der notwendigen Zerlegung der Sparse-Matrizen in kleine Blockmatrizen (Superknoten, engl. SuperNodes) kommt die cuBLAS-Bibliothek (GPU) oder die OpenBLAS-Bibliothek (CPU) zum Einsatz. Der Einsatz einer GPU erfordert eine Mindestgröße des Superknotens, ansonsten wird die Berechnung auf der CPU durchgeführt. Analysen haben gezeigt, dass bei Verwendung der C-Routinen von Cholmod in den vorliegenden Fällen die Berechnungen der Sparse-Matrizen, wegen einer zu geringen Komplexität in den Triangulationen und damit einhergehend wegen zu kleiner Blockmatrizen, weder für das Ortra-Membran-Verfahren noch für den Ortra-Gitter-Ansatz auf der GPU erfolgen. So hat der Ortra-Gitter-Ansatz in der Regel nur eine achtfache Nachbarschaft zu den umliegenden Punkten (vgl. Abb. 7).

Bei Anwendung der Cholesky-Zerlegung durch C-Routinen nach Cholmod werden zur Orthorektifizierung eines 10 km²-Bereichs ca. 2 Minuten auf der CPU des KI-Servers benötigt – dies gilt unabhängig davon, ob die Prozessierung

mit oder ohne Steiner-Punkte der Qualitätsstufe Q20 erfolgt (vgl. Tab. 1 jeweils Buchstabe c). In den 2 Minuten ist mit 50 Sekunden der zusätzliche Matrizenaufbau für die 625 Tsd. Gitterpunkte enthalten, bei dem eine Q20-Verdichtung mit ca. 38 Tsd. Steiner-Punkten nicht ins Gewicht fällt. Falls bei der Ausgleichung mit Datenschnittstellen gearbeitet wird, repräsentieren die 50 Sekunden die Laufzeit zum Einlesen der Matrizen über eine ASCII-Schnittstelle mittels einer C-Routine.

Die gleiche Zeit von 50 Sekunden wird in Python für die Berechnung und Zuweisung der Matrizenwerte und zur sog. Allokation benötigt. Die Laufzeit zur Auflösung des Gleichungssystems über Cholmod bleibt hingegen unverändert: Dem Matrizenaufbau geht die Definition der in Abb. 7 dargestellten Netzstruktur in Matrizenform voraus. Für den Aufbau der Matrizendefinitionen (A-, P-Matrix und l-Vektor) in einer ASCII-Schnittstelle werden ca. 10 Minuten benötigt, während eine direkte Berechnung und Zuweisung der Matrizenwerte innerhalb von Python diese Zeit um den Faktor 30 auf 20 Sekunden verkürzen kann. Zum Allokieren der Matrizen werden weitere 30 Sekunden benötigt. Das zeigt, dass durch eine Überführung der Ausgleichung ins Python-ecosystem Datenschnittstellen für die Ausgleichung entbehrlich sind und eine lauffeioptimierte Berechnung im Hauptspeicher möglich ist.

Für die Orthorektifizierung eines 16 km² und eines 160 km² großen Bereichs zeigen sich auf Basis der Cholmod-Bibliothek linear erhöhte Laufzeiten. Damit werden für eine bayernweite Orthorektifizierung, bei Anwendung der Cholesky-Zerlegung durch C-Routinen nach Cholmod, 9,8 Tage benötigt. Durch eine Parallelisierung und den Einsatz mehrerer leistungsstarker CPU-Rechner ist die erzielte Laufzeit grundsätzlich skalierbar.

Neuere Entwicklungen zeigen, dass mit CuPy und der Bibliothek cuSolver Normalgleichungssysteme über indirekte Methoden sehr effizient auf der GPU gelöst werden können, beispielsweise über konjugierte Gradienten (Golub und Ye 2000) oder über den von Saad weiterentwickelten GMRES-Ansatz (GMRES: generalized minimal residual) (Haidar et al. 2018). Der GMRES-Ansatz arbeitet als indirekte Methode inkrementell über Iterationen und ermöglicht auch für den Ortra-Gitter-Ansatz und das Ortra-Membranverfahren den Einsatz auf der GPU. Als Näherungswerte werden die aus dem Helmert-Ansatz berechneten Transformationsparameter in den GMRES-Ansatz eingeführt. Die Koordinatenwerte sind zuvor auf den Schwerpunkt zu reduzieren. Zur Optimierung der Laufzeit wird bei der Berechnung der Cholesky-Zerlegung von Sparse-Matrizen zusätzlich die ILU-Präkonditionierung (ILU: Incomplete LU Factorization) eingesetzt, die SciPy z.Z. noch auf der CPU durchführt. Der auf der GPU arbeitende, iterative GMRES-Ansatz (Saad 1986, 1993, 2003) führt für die Präkonditionierung des Gleichungssystems eine unvollständige LR-Zerlegung durch. In Verbindung mit der ILU läuft der GMRES-Ansatz somit derzeit nur in Kombination von CPU und GPU und benötigt zur Lösung der Unbekannten auf einem KI-Server mit

acht A100-GPUs von NVidia eine vierfach niedrigere Rechenzeit gegenüber der Lösung der Sparse-Matrizen mittels SciPy, aber eine dreifach höhere Laufzeit wie der auf der CPU arbeitende Ansatz nach Cholmod. Sie beträgt für den Ortra-Gitter-Ansatz sowohl mit als auch ohne Steiner-Punkte jeweils ca. sechs Minuten (vgl. Tab. 1).

Für das Testgebiet zeigen die in der letzten und vorletzten Zeile der Tab. 1 ausgewiesenen Untersuchungsergebnisse, dass der über Iterationen arbeitende indirekte GMRES-Ansatz beim Ortra-Gitter-Ansatz nur konvergiert, wenn das um »Schnittlinien« optimierte Triangulationsnetz (vgl. Abb. 15) verwendet wird. Erst dann ergeben sich gegenüber der Cholesky-Zerlegung nach Cholmod identische Ergebnisse (vgl. Tab. 1 letzte Zeile). Der GMRES-Ansatz birgt gegenüber Cholmod folgende Nachteile:

1. Zusätzliche Sparse-Matrizen-Datentypen sind für den Einsatz auf der GPU erforderlich.
2. Näherungswerte für die Unbekannten sind einzuführen, die beispielsweise aus einer Helmert-Transformation zu ermitteln sind.
3. Koordinatenwerte sind vor der Ausgleichung auf den Schwerpunkt zu reduzieren und anschließend wieder zu addieren.
4. Bei größeren Gleichungssystemen besteht die latente Gefahr einer numerischen Instabilität und erfordert im Prinzip den Einsatz eines zweiten, unabhängigen Ausgleichsverfahrens.

Von den vier untersuchten Orthorektifizierungs-Verfahren liefert der Ortra-Gitter-Ansatz ohne Schnittlinien keine brauchbaren Ergebnisse. Bei den drei verbleibenden Verfahren liegen alle Ergebnisse im Subpixelbereich (vgl. Tab. 1). Der Ortra-Gitter-Ansatz erweist sich unter Verwendung der Steiner-Punkte in der Qualitätsstufe Q20 in Verbindung mit den »Schnittlinien« der Rechenkachel durch zusätzliche Steiner-Punkte als der genaueste Ansatz. Er ist gegenüber der Sibson-Dreiecksinterpolation nur geringfügig schneller, aber signifikant besser (hier um 50 cm).

5 Verfahrensnachweis mittels Satellitendaten von PlanetScope

In den vorangegangenen Kapiteln wurden resampelte TrueDOPs ohne Bild-Überlappung in einem Simulator verarbeitet. Der Verfahrensnachweis erfolgt hier anhand von vier überlappenden Satelliten-Aufnahmen von PlanetScope mit einer Bodenauflösung von 3 m (vgl. Abb. 16). Das Training des KI-Netzwerkes zur Gebäudedetektion und die Inferenz wurden in derselben Auflösung durchgeführt und lieferten in dem ca. 415 km² großen Testgebiet rund 83.000 KI-Gebäude, die sich im Überlappungsbereich durchdringen (vgl. Abb. 17a). Bezogen auf eine Bodenauflösung von 4 m entspricht das Testgebiet ca. 1/125 der Fläche Bayerns. In rund 50 Fällen ergaben sich identische Koordinaten im



Abb. 16:
Überlappende PlanetScope-
Aufnahmen vor der
Orthorektifizierung eines
ca. 415 km² (22 × 19 km)
großen Testgebiets

cm-Bereich für die in den unterschiedlichen Bildern detektierten KI-Gebäudeschwerpunkte. Diese Doppelungen wurden nach dem Zufallsprinzip eliminiert. Die Passpunktbestimmung zur Georeferenzierung der PlanetScope-Daten erfolgte über eine Aggregation von KI-Gebäuden (Roschlaub et al. 2023) und lieferte für Punkte mit einem maximalen Abstand von drei Pixeln bzw. 9 m über die vier Bilder insgesamt 11.295 Passpunkte. Zur weiteren Prozessierung der PlanetScope-Bilder aus Abb. 16 ist zunächst eine radiometrische Verbesserung erforderlich.

Im Anschluss an die in den vorangegangenen Kapiteln beschriebene Georeferenzierung und Orthorektifizierung ist in einem abschließenden Schritt die pixelweise Zuordnung von Radiometrie-Werten (Farbwerten) aus einem Satellitenbild im KI-System auf das orthogonale Gitter im DFK-System durchzuführen. Für überlappende Bilder ist dabei eine eindeutige Zuordnung je Gitterpunkt erforderlich. Dies kann mit den im Satellitenbild detektierten KI-Gebäudeschwerpunkten über die IDs der Satellitenbilder erfolgen. Steiner-Punkte bleiben hier unberücksichtigt. Zunächst ist mittels einer »Punkt in Polygon Abfrage« festzustellen, in welchen der sich möglicherweise überlappenden Satellitenbilder der Gitterpunkt liegt. Sollte er nur in einem Satellitenbild liegen, dann ist die Zuordnung eindeutig. Andernfalls ergeben sich mehrere Möglichkeiten bzw. IDs. Bei einer Mehrdeutigkeit sollte das radiometrisch »bessere« Satellitenbild ausgewählt werden. Als Entschei-

dungskriterium dient der zum Gitterpunkt nächstgelegene KI-Gebäudeschwerpunkt, weil angenommen wird, dass dort, wo ein Gebäude segmentiert werden konnte, radiometrisch gute Verhältnisse vorliegen. Bei der Berechnung des nächstgelegenen Gebäudeschwerpunktes sind nur diejenigen Gebäudeschwerpunkte mit denselben IDs der im Überlappungsbereich zuvor identifizierten Satellitenbilder zu betrachten. Mit der ID des so ermittelten nächstgelegenen Gebäudeschwerpunktes sind an der Position des Gitterpunktes im KI-System die Radiometrie-Werte aus dem Satellitenbild zu entnehmen und auf den Gitterpunkt im DFK-System zu übertragen. Dabei wird auf die Anwendung von Filtern – beispielsweise mittels bikubischer Interpolation – verzichtet, um die originäre Bildqualität zu erhalten.

Für das in Abb. 16 dargestellte Testgebiet erfolgte die Orthorektifizierung mit Steiner-Punkten sowohl nach der Sibson-Dreiecks-Interpolation als auch nach dem Ortra-Gitter-Ansatz. Die Sibson-Dreiecks-Interpolation lieferte in Analogie zu Tab. 1 für den 415 km² großen Ausschnitt über alle Gitterpunkte einen Mittelwert der Restklaffungen im Subpixelbereich von 2,28 m und eine Standardabweichung von $\sigma = \pm 1,27$ m. Der Ortra-Gitter-Ansatz lieferte mit 1,99 m und $\sigma = \pm 1,39$ m nochmals bessere Werte. Für eine Auswertung nach dem Ortra-Gitter-Ansatz war zur Lösung der Ausgleichung (11) im Hauptspeicher eine Partitionierung des Testgebiets notwendig. Die Entnahme der

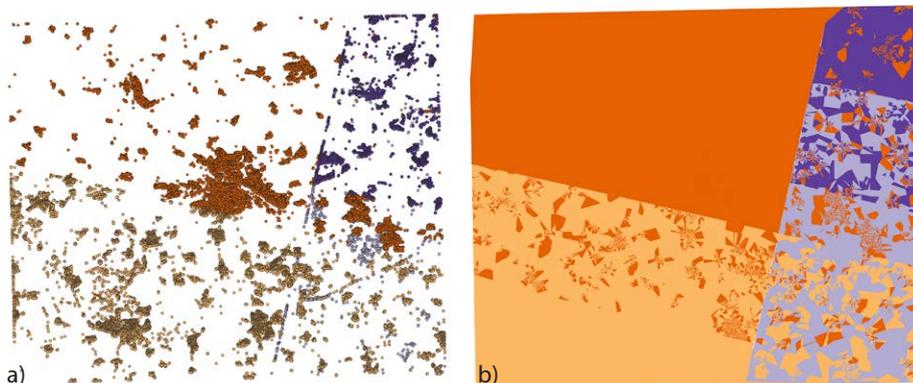


Abb. 17:
(a) Durchdringung der in den einzelnen Bildern getrennt voneinander segmentierten KI-Gebäude;
(b) Schematisches Ergebnisbild für die Entnahme der Radiometrie-Werte aus den jeweiligen Bildern, die sich in den Überlappungsbereichen durchdringen



Abb. 18:
Beispiel 1: Ergebnis der Daten-
prozessierung eines ersten zu
Abb. 17 korrespondierenden
Ausschnitts zweier überlappender
Aufnahmen

- a) Aufnahme 1 im Überlappungs-
bereich
- b) Aufnahme 2 im Überlappungs-
bereich mit Wolken
- c) Pixel in Ocker entsprechen den
Radiometrie-Werten der Aufnah-
me 1 und Lila der Aufnahme 2
- d) Ergebnisbild als Komposition
beider Aufnahmen



Abb. 19:
Beispiel 2: Ergebnis der Daten-
prozessierung eines zweiten zu
Abb. 17 korrespondierenden
Ausschnitts zweier überlappender
Aufnahmen

- a) Aufnahme 1 im Überlappungs-
bereich
- b) Aufnahme 2 im Überlappungs-
bereich mit Wolken
- c) Pixel in hell Lila entsprechen den
Radiometrie-Werten der Aufnah-
me 1 und Ocker der Aufnahme 2
- d) Ergebnisbild als Komposition
beider Aufnahmen

Radiometrie-Werte ist in Abb. 17b illustriert und zeigt für jedes Pixel, aus welchem Bildausschnitt der Abb. 16 die Radiometrie-Werte entnommen und auf den orthorektifizierten Gitterpunkt übertragen wurden. In den Abbildungen 18d und 19d sind die Ergebnisse für zwei Ausschnitte des vollständig prozessierten Testgebiets im Überlappungsbereich zweier PlanetScope-Aufnahmen dargestellt. Obwohl in Abb. 18 die wolkenfreie Aufnahme 1 gegenüber der wolken- und schattenbehafteten Aufnahme 2 radiometrisch besser ist, sind die Radiometrie-Werte, entsprechend Abb. 18c, überwiegend aus der zweiten Aufnahme übernommen worden, da hier zufällig in der näheren Umgebung nähergelegene KI-Gebäudeschwerpunkte lagen als in der ersten Aufnahme. Entgegengesetzte Beispiele lassen sich ebenfalls finden, wie im Ausschnitt des zweiten Beispiels der Abb. 19. Die Ergebnisse in den Abbildungen 18d und 19d zeigen signifikante Verbesserungen. Die Laufzeit der radiometrischen Zuordnung betrug 6 Stunden.

Da die Mittelwerte und Standardabweichungen der Restklaffungen beider Orthorektifizierungsverfahren im Subpixelbereich liegen, sind die Ergebnisbilder von Abb. 17b sowie Abb. 18 und Abb. 19 für beide Verfahren identisch.

Im Rahmen des Forschungsprojektes mit im Verbund fliegenden CubeSat-Satelliten erfolgt der Überflug zeitgleich. Damit ergeben sich gegenüber den PlanetScope-Aufnahmen im Überlappungsbereich kaum atmosphärische Unterschiede, sodass die Prozessierung in diesen Fällen unproblematisch ist. Das beschriebene Verfahren kann jedoch auch bei einer Kombination von Aufnahmen aus verschiedenen Epochen angewendet werden, bei der ebenfalls inhomogene Aufnahmen vorliegen.

6 Bewertung und Ausblick

Das vorgestellte Verfahren zur Optimierung der Triangulation und das zweidimensionale Ortra-Membranverfahren liefern anhand einer bereits etablierten Verfahrenslösung zur Bestimmung von Anschlusspunkten Restklaffungen mit minimalen Formveränderungen. Die untersuchten Interpolationsverfahren sind bestens zur Orthorektifizierung geeignet und ermöglichen eine automatisierte Mosaikierung von Fernerkundungsbildern, wie sie beispielsweise beim Einsatz von CubeSat-Satelliten erforderlich ist.

Die Ausgleichung eines durch Steiner-Punkte verdichteten Triangulationsnetzes mittels Ortra-Membranverfahren verteilt die von den Anschlusspunkten induzierten Netzspannungen nachbarschaftstreu auf eine größere Anzahl von Netzpunkten und minimiert somit weiter die Restklaffungen, die sich aus der Differenz der angeschlossenen und freien Netzausgleichung ergeben.

Zur Georeferenzierung und Orthorektifizierung ist die angeschlossene Netzausgleichung des Ortra-Membranverfahrens ausreichend. Jedoch ist eine Qualitätssicherung gemeinsam mit der freien Netzausgleichung über das Ortra-Membranverfahren mit seinen minimalen Verzerrun-

gen in den Widerspruchsvektoren an den Anschluss- und Massepunkten sowie den Steiner-Punkten von besonderem Vorteil.

Zur Orthorektifizierung liefert der auf die Georeferenzierung aufbauende Ortra-Gitter-Ansatz mit Schnittlinien entlang der Rechenkachel (vgl. Tab. 1, letzte Zeile) in Verbindung mit einer um Steiner-Punkte der Qualitätsstufe Q20 verdichteten Triangulation der Masse- und Anschlusspunkte die besten Ergebnisse. Der Ortra-Gitter-Ansatz liefert ohne Schnittlinien keine brauchbaren Ergebnisse. Die allgemeine Sibson-Interpolation via Voronoi-Diagrammen ist im Vergleich zur Sibson-Dreiecks-Interpolation deutlich komplexer und rechenintensiver. Von den untersuchten Orthorektifizierungsverfahren ist die Sibson-Dreiecksinterpolation am einfachsten zu implementieren. Sie eignet sich gemeinsam mit dem Ortra-Gitter-Ansatz zur Parallelisierung.

Die Ausgleichungen sind im Hinblick auf die stabilere Numerik vorzugsweise über den Ansatz nach Cholmod auf der CPU durchzuführen, anstelle des auf der GPU arbeitenden GMRES-Ansatzes. Somit ist zum Georeferenzieren und Mosaikieren von Fernerkundungsdaten eine aus mehreren leistungsstarken Rechnern mit Mehrkernprozessoren bestehende IT-Infrastruktur ausreichend.

Das Verfahren zur Mosaikierung liefert in Verbindung mit der pixelweisen Zuordnung je Gitterpunkt verbesserte Radiometrie-Werte im mosaikierten und orthorektifizierten Ergebnisbild.

Die Integration eines Wolkendetektors in die Prozesskette, noch vor dem Training des KI-Netzwerks, verspricht weitere Vorteile und ist gemeinsam mit dem Aufbau eines landesweiten Simulators Gegenstand weiterer Untersuchungen und Optimierungen, wie beispielsweise der Parallelisierung.

Literatur

- Ackermann (1973): Experience with Applications of Block Adjustment for Large Scale Surveys. In: *Photogrammetric Record*, 7(41), April 1973, 499–515.
- Ahrens, B., Böhmer, K.-H. (2010): NTv2-Gitterdateien zur Überführung katasterbezogener Datenbestände ins ETRS89. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, Heft 1/2010, 135. Jg., 16–20.
- Bauer, R., Pail, R., Schilling, K., Stilla, U., Schleder, D., Dotterweich, M., Roschlaub, R., Kleinschrodt, A., Draschka, L., Gruber, T., Zingerle, P., Greza, M. (2023): Bayerisches Satellitennetzwerk für Fernerkundung und Biomonitoring. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, Heft 4/2023, 148. Jg., 219–229. DOI: 10.12902/zfv-0436-2023.
- Cheng, S.-W., Dey, T.K., Shewchuk, J.R. (2012): *Delaunay Mesh Generation*. CRC Press, Boca Raton, Florida. <https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/jrspapers.html#delref>, letzter Zugriff 4/2023.
- Farin, G. (1990): Surfaces over Dirichlet tessellations. In: *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, Issues 1–4, 281–291.
- Gielsdorf, F., Gründig, L. (1997): Nachbarschaftstreu Anpassung auf der Basis des Membranmodells. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen*, Heft 5/1997, 122. Jg., 208–218.

- Glock, C.E. (2021): Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM mittels des Homogenisierungsansatzes Ortra. Dissertation. Technische Universität München. <https://mediatum.ub.tum.de/?id=1585252>, letzter Zugriff 5/2023.
- Glock, C., Bauer, R., Wunderlich, T., Pail, R., Bletzinger, K.-U. (2019): Das Ortra-Verfahren für die Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM in Bayern. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, Heft 1/2019, 144. Jg., 25–40. DOI: 10.12902/zfv-0237-2018.
- Golub, G.H., Ye, Q. (2000): Inexact preconditioned conjugate gradient method with inner-outer iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4): 1305–1320.
- Greza, M., Hoegner, L., Hirt, P.-R., Roschlaub, R., Stilla, U. (2023): Satellite Network Bavaria – Mission and Data Processing. In: Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation (DGPF), 43. Wissenschaftlich-Technische Jahrestagung der DGPF, 22.–23. März 2023 in München, Band 31, 174–182. DOI: 10.24407/KXP:1841079839.
- Großmann, W. (1969): Grundzüge der Ausgleichsrechnung, Springer-Lehrbuch, Berlin, Heidelberg, New York.
- Haidar, A., Tomov, S., Dongarra, J. and Higham, N.J. (2018): Harnessing GPU Tensor Cores for Fast FP16 Arithmetic to Speed up Mixed-Precision Iterative Refinement Solvers. SC18: International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, 603–613. DOI: 10.1109/SC.2018.00050.
- Hampp, D., Glock, C. (2017): Ein ausgeglichenes Bayern. In: Mitteilungen des DVW-Bayern, Heft 2/2017, 69. Jg., 105–126.
- Hettwer, J., Benning, W. (2003): Restklaffungsverteilung mit der Natural-Neighbour-Interpolation. In: *AVN – Allgemeine Vermessungsnachrichten*, Heft 4/2003, 110. Jg., 122–129.
- Honsberger, R. (1995), *The Steiner and the Tarry Point*, Nineteenth und Twentieth Century Geometry, Washington, DC: Math. Association of America, 119–124.
- Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung, de Gruyter Lehrbuch, Berlin New York.
- Kleinschrodt, A., Tandon, T., Draschka, L., Kremmydas, P., Kamble, P., Schilling, K., Zingerle, P., Pfaffenzer, N., Gruber, T., Pail, R., Hirt, P.-R., Greza, M., Hoegner, L., Roschlaub, R. (2023): CuBy – The Bavarian Small Satellite Formation for Bio-monitoring, 14th IAA Symposium on Small Satellites for Earth System Observation (14th IAA SEO), in print.
- Ledoux H., Gold C. (2005): An Efficient Natural Neighbour Interpolation Algorithm for Geoscientific Modelling. In: Fischer P.F. (Editor): *Developments in Spatial Data Handling*, 11th International Symposium on Spatial Data Handling, Springer Berlin, Heidelberg, 97–108. DOI: 10.1007/b138045.
- Lenz, N., Greza, M. (2023): Simulation of Earth Observation Data Utilizing a Virtual Satellite Camera. In: Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation (DGPF), 43. Wissenschaftlich-Technische Jahrestagung der DGPF, 22.–23. März 2023 in München, Band 31, 50–60. DOI: 10.24407/KXP:1841067350.
- Linkwitz, K. (1988): Einige Bemerkungen zur Fehlerellipse und zum Fehlerellipsoid. In: *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, 345–358.
- Lucas, G.W. (2021a): A Fast and Accurate Algorithm for Natural Neighbor Interpolation. <https://gwlucastrig.github.io/TinfourDocs/NaturalNeighborTinfourAlgorithm/index.html>, letzter Zugriff 4/2023.
- Lucas, G.W. (2021b): Data Elements and Algorithms for the Tinfour Library. <https://gwlucastrig.github.io/TinfourDocs/TinfourAlgorithmsAndDataElements.pdf>, letzter Zugriff 4/2023.
- Neuberg, J. (1886). Sur le point de Steiner. *Journal de mathématiques spéciales*.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichsrechnung. Statistische Auswertemethoden, 2. Auflage, Walter de Gruyter Verlag.
- Roschlaub, R. (1999): Klassifikation und Interpolation mittels affin-invarianter Voronoidiagramme auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in großmaßstäbigen Geoinformationssystemen. DGK, Reihe C, Heft Nr. 509.
- Roschlaub, R., Glock, C., Zerndl, M., Maier, A., Möst, K., Hirt, P.-R., Greza, M. (2023): Grundlagen zur automatisierten Ermittlung hochgenauer Passpunkte für CubeSat-Satellitenbilder mittels Deep-Learning-gestützter Delaunay-Triangulationen basierend auf Gebäudedaten des Liegenschaftskatasters. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, Heft 2/2023, 148. Jg., 66–93. DOI: 10.12902/zfv-0424-2023.
- Saad, Y. (1993): A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 14, Issue 2, Mar 1993, 461–469. DOI: 10.1137/0914028.
- Saad, Y. (2003): *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd edition, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN 0-898-71534-2.
- Saad, Y., Schultz, H. (1986): GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, No: 3, 856–869.
- Schwarz H.R., Rutishauser, H., Stiefel, E. (1972): *Matrizen-Numerik, Numerik symmetrischer Matrizen*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Shewchuk, J.R. (1997): *Delaunay Refinement Mesh Generation*. Dissertation. CMU-CS-97-137, School of Computer Science Computer Science Department Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213.
- Shewchuk, J.R. (2014): *Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation*. *Computational Geometry: Theory and Applications*, Vol. 47, Issue 7, 741–778. DOI: 10.1016/S0925-7721(01)00047-5.
- Sibson, R. (1980): A vector identity for the Dirichlet tessellation. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 87, Issue 1, 151–155.
- Sibson R. (1981): A brief description of natural neighbour interpolation. In: Barnett, V. (Ed.): *Interpreting Multivariate Data*. Wiley, New York, USA, 21–36.
- Van den Hout, C.M.A. (1966): *The Anblock Method of planimetric Block Adjustment: Mathematical Foundation and Organisation of its practical Application*. *Photogrammetrie* 21, 171–178.
- Wieser, A., Lienhart, W., Brunner, F.K. (2003): Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktfeld, *VGI- Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation*, 91 (2), 115–121.

Kontakt

Dr.-Ing. Robert Roschlaub | Dr.-Ing. Clemens Glock |
 Dipl.-Ing. (FH) Manfred Zerndl | Andreas Maier |
 Dipl.-Ing. (FH) Karin Möst | Dipl.-Ing. (FH) Thomas Krey
 Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung
 Alexandrastraße 4, 80538 München
robert.roschlaub@ldbv.bayern.de | clemens.glock@ldbv.bayern.de |
manfred.zerndl@ldbv.bayern.de | andreas.maier@ldbv.bayern.de |
karin.moest@ldbv.bayern.de | thomas.krey@ldbv.bayern.de |

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.