

Zwangsfreie Richtungsmessungen

Force-free Angle Measurements

Ansgar Brunn

Zusammenfassung

Moderne, digitale, automatisierte Tachymeter bieten einen flexiblen Einsatz und erfordern gleichzeitig flexible Rechenverfahren. Einschränkungen der tradierten Auswerteverfahren in Bezug auf die Richtungsmessungen in den Zenit und in Richtung der Nullrichtung (Nullpunkt des Teilkreises) sind dabei nicht akzeptabel. Daher wird in diesem Beitrag ein neuer, auf Richtungsvektoren basierender Umgang mit Richtungsmessungen vorgeschlagen. Der direkte Vergleich des tradierten Verfahrens mit dem neuen Ansatz zeigt das neu gewonnene Potential, letztlich aber auch die Notwendigkeit, das Geodätische Rechnen neu zu erfinden.

Schlüsselwörter: Tachymeter, Richtungsmessung, Polarkoordinaten, Ausgleichsrechnung

Summary

Modern, digital, automated total stations offer flexible use and at the same time require flexible calculation methods. Limitations of the traditional evaluation methods with regard to the angle measurements into the zenith and in the zero direction (zero point of the horizontal circle) are not acceptable. Therefore, a new handling of direction measurements based on direction vectors is proposed in this paper. The direct comparison of the traditional method with the new approach shows the newly gained potential, but ultimately also the necessity to reinvent geodetic computing.

Keywords: total station, angle measurements, polar coordinates, parameter estimation

1 Einleitung

1.1 Motivation

Der Tachymeter ist in der modernen, digitalen Vermessung immer noch *das* wichtigste Arbeitsgerät schlechthin. Tagtäglich werden mit Tachymetern u. a. unzählige Richtungen, also kombinierte Horizontal- und Vertikalrichtungen gemessen. Zur Auswertung der Richtungsmessungen werden tradierte Rechenschemata eingesetzt (z. B. Witte 2011), die durch eine geschickte und erprobte Abfolge von Rechenschritten in der Regel eine erfolgreiche Auswertung ermöglichen. Durch eine günstige Wahl der Ausrichtung der Nullrichtung (Orientierung) des Horizontalkreises des Tachymeters und der praktischen Unmöglichkeit, Punkte im Zenit anzuzielen, waren diese Rechenabläufe in sich schlüssig und allgemein anwendbar.

Mit dem Aufkommen der automatischen Tachymeter erweitern sich die Fähigkeiten der Tachymeter, da einerseits eine manuelle Ausrichtung der Nullrichtung im Messprozess nicht mehr möglich ist bzw. als einschränkend empfunden wird und spätestens durch die Remotecontroller und den Einbau von digitalen Kameras in den Strahlengang eine optische Anzielung durch das Fernrohr nicht mehr notwendig ist und so auch die Bauart des Tachymeters mit seinem Sockel nicht mehr einschränkt. Abnehmbare und abklappbare Tragbügel (z. B. Leica TS 60, Trimble RTS873) machen den Blick in den Zenit frei.

Besonders im Innenbereich wachsen die Aufgaben mit Building-Information-Modelling (BIM) und einhergehenden vertikalen Zielungen, vor allem zwischen Stockwerken (z. B. Meyer et al. 2021).

Terrestrische Laserscanner sind dabei Vorreiter, die in der gesamten Vollkugel, nur durch den Scannerkörper eingeschränkt, messen können. Hier erfolgt die Auswertung daher oft auch in homogenen Koordinaten (z. B. Gielsdorf et al. 2004, Rietdorf 2005).

Die traditionellen Auswerteverfahren berücksichtigen die Zyklizität der Richtungsmessungen in Gon oder Grad, was für die automatische Auswertung gerade für Horizontalrichtungen in der Nähe der Nullrichtung mindestens aufwändig ist. Spätestens für Messungen im Zenit versagen die tradierten Rechenprozesse jedoch und erzeugen so schon bei der Messplanung Zwänge auf die Messanordnung. Daher wird in diesem Beitrag ein Verfahren vorgeschlagen, das diese Einschränkungen nicht aufweist. Die zusätzlichen Fähigkeiten des neuen Verfahrens werden anhand eines Vergleichs mit dem tradierten Ansatz mit simulierten Daten aufgezeigt.

1.2 Übersicht über den Artikel

Im Beitrag folgen im zweiten Abschnitt einige Grundlagen in der Umrechnung der geodätischen Messungen in Richtungsvektoren und zurück. Dabei ist der Aspekt der Varianz-/Kovarianzfortpflanzung von besonderer Bedeutung für den späteren Vergleich. Im dritten Abschnitt werden beide Rechenmethoden zur Verarbeitung der Richtungsmessungen beschrieben. Der Fokus liegt auf dem neuen, auf Richtungsvektoren basierenden Vorgehen. Abschnitt 4 enthält die Versuche mit simulierten Daten, die Ergebnisse werden in Abschnitt 5 dargestellt und danach diskutiert. Der Beitrag schließt mit einem Fazit und einem Ausblick auf weitere Untersuchungen und das grundsätzliche Potenzial dieses Ansatzes.

2 Grundlagen

Der neue Auswertansatz überführt die lokalen, polaren Richtungsmessungen in lokale, karthésische Richtungsvektoren, die nach der Verarbeitung wieder zurückgerechnet werden. Es ist wichtig, die Genauigkeiten beim Wechsel der Repräsentation mitzuführen. Daher werden hier kurz die Umrechnungen zwischen der polaren und der karthésischen Repräsentation der Messungen inkl. ihrer Varianz-/Kovarianzfortpflanzung behandelt. Der Aspekt der Transformation von geodätischen Polarkoordinaten in mathematische Polarkoordinaten wird, ebenso kurz, vorangestellt.

Umrechnung zwischen geodätischen und mathematischen Richtungsmessungen

Zwischen beiden polaren Repräsentationen von Richtungsmessungen lässt sich mit

$$\mathbf{p}_g = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100[\text{gon}] - a\rho \\ 100[\text{gon}] - e\rho \end{pmatrix} \quad (1)$$

bzw.

$$\mathbf{p}_m = \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 - h/\rho \\ \pi/2 - v/\rho \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $\rho = 200[\text{gon}]/\pi$ als Umrechnungskonstante transformieren, mit den Richtungsmessungen (horizontal, vertikal) (h, v) in Gon und dem Azimut und der Elevation (a, e) im Bogenmaß. Sofern die geodätischen Messungen unabhängig sind, gilt dies auch für die Messungen im mathematischen System und umgekehrt, wie die Varianz- und Kovarianzfortpflanzung zeigt:

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}_m) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_h^2 \pi^2}{40000[\text{gon}^2]} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_v^2 \pi^2}{40000[\text{gon}^2]} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Umrechnung von mathematischen Richtungsmessungen in einen Richtungsvektor

Berechnung eines Richtungsvektors aus mathematischen Polarkoordinaten:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (\cos(a) \cos(e) \quad \cos(e) \sin(a) \quad \sin(e))^T \quad (4)$$

Jacobimatrix für die Berechnung des Richtungsvektors aus den mathematischen Messungen:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}_a) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_m} \right) = \begin{pmatrix} -\cos(e) \sin(a) & -\cos(a) \sin(e) \\ \cos(a) \cos(e) & -\sin(a) \sin(e) \\ 0 & \cos(e) \end{pmatrix}^T \quad (5)$$

Varianz- und Kovarianzmatrix bei unkorrelierter gleicher Genauigkeit der mathematischen Messungen ($\mathbf{D}(\mathbf{p}_m) = \sigma^2 \mathbf{I}$):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} -2\sin(a)^2 \sin(e)^2 + \sin(a)^2 + \sin(e)^2 & -\frac{\cos(2e) \sin(2a)}{2} & -\cos(a) \cos(e) \sin(e) \\ -\frac{\cos(2e) \sin(2a)}{2} & 2\sin(a)^2 \sin(e)^2 - \sin(a)^2 - \sin(e)^2 + 1 & -\cos(e) \sin(a) \sin(e) \\ -\cos(a) \cos(e) \sin(e) & -\cos(e) \sin(a) \sin(e) & \cos(e)^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Umrechnung vom Richtungsvektor in geodätische Richtungsmessungen

Berechnung von mathematischen Polarkoordinaten aus dem Richtungsvektor:

$$\mathbf{p}_m = (a, e)^T = \begin{pmatrix} \text{atan2}(y, x) \\ \text{atan2}\left(z, \sqrt{(x)^2 + (y)^2}\right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die Jacobimatrix für die Berechnung der geodätischen Polarkoordinaten aus dem Richtungsvektor folgt unter Nutzung von Gl. (2)

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}_g}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial \mathbf{p}_g}{\partial \mathbf{r}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{200y}{\pi(x^2 + y^2)} & -\frac{200x}{\pi(x^2 + y^2)} & 0 \\ \frac{200xz}{\pi\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{200yz}{\pi\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} & -\frac{200\sqrt{x^2 + y^2}}{\pi(x^2 + y^2 + z^2)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$.

Varianz-/Kovarianzfortpflanzungsgesetz für die Umrechnung vom Richtungsvektor in geodätische Richtungsmessungen:

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}_g) = \mathbf{J}_{\mathbf{p}_g}(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{\mathbf{p}_g}(\mathbf{r})^T \quad (9)$$

Daraus lässt sich die Korrelationsmatrix $\mathbf{K}(\mathbf{p}_g)$ (siehe Koch 1986, S. 15) ableiten.

3 Methode

Seien n Richtungsmessungen $\mathbf{p}_{g,i} = (h_i, v_i)^T$ mit $i \in \{1 \dots n\}$ gegeben. Zur Reduktion der Auswirkungen von Gerätefehlern kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Messung von Vollsätzen angenommen werden. Die Auswirkungen von Gerätefehlern auf die mittlere Richtung ist nicht Thema dieses Artikels. Die mittlere Richtung soll durch zwei Verfahren bestimmt werden. Die Ergebnisse sollen verglichen werden.

Für den Vergleich der Schätzung einer mittleren Richtung werden zwei getrennte Rechenwege beschriftet. Dazu werden alle geodätischen Richtungsmessungen als gleich genau und unkorreliert angenommen. Die Genauigkeit der

mittleren Richtung ist Teil des Schätzergebnisses. Folgende zwei Verfahren werden durchgeführt:

1. Schätzung als Mittelung der geodätischen Richtungsmessungen: Durch eine einfache Mittelbildung werden alle gemessenen Vertikal- und Horizontalrichtungen zum Zielpunkt getrennt gemittelt. Die Richtungsmessungen der zweiten Lage müssen dazu in die erste Lage überführt werden. Üblicherweise betrachtet man dazu die Vertikalrichtung jeder Zielung. Sofern diese über 200 gon ist, wird die zweite Lage angenommen. Daraufhin wird die entsprechende Vertikalrichtung der ersten Lage berechnet und die Horizontalrichtung um 200 gon erhöht. Abschließend werden alle Richtungen wieder in den Wertebereich [0 gon ... 400 gon[, z. B. durch einen Modulo-Operator, gebracht. Die Mittel der Richtungen lassen sich dann berechnen durch

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} h_m \\ v_m \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N h_i \\ \sum_{i=1}^N v_i \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Die Varianz- und Kovarianzmatrix ergibt sich als Diagonalmatrix über

$$\mathbf{D}(\mathbf{m}) = \frac{1}{(N-1)} \text{diag} \left(\sum_{i=1}^N (h_m - h_i)^2, \sum_{i=1}^N (v_m - v_i)^2 \right). \quad (11)$$

Die Standardabweichungen folgen als Wurzel aus den Hauptdiagonalelementen der Varianz- und Kovarianzmatrix.

2. Schätzung der mittleren Richtung durch Richtungsvektoren: Die geodätischen Messungen werden dazu in Form der Einheitsrichtungsvektoren gemittelt. Die geodätischen Messungen werden zunächst in eine mathematische Richtungsrepräsentation transformiert (siehe Gl. (2)), die dann jeweils in den entsprechenden Einheitsrichtungsvektor umgerechnet wird (siehe Gl. (3)). Die Varianz- und Kovarianzmatrix der berechneten Richtungsvektoren ergibt sich aus Gl. (6). Der optimale mittlere Richtungsvektor wird nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Restriktionen geschätzt. Restriktionen dienen in der Parameterschätzung zur Reduktion des Parameterraums durch funktionale Festlegungen zwischen den unbekanntem, zu schätzenden Parametern, insbesondere auch dann, wenn Parameter gar nicht durch die Beobachtungen bestimmbar sind. Da die Beobachtungsgleichungen und auch die Restriktion hier nicht linear sind, muss zur Bestimmung der optimalen mittleren Richtung linearisiert werden:

$$\mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{y} + \mathbf{e} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}(\mathbf{y}) = \sigma_o^2 \mathbf{P}. \quad (12)$$

werden die Beobachtungsgleichungen für die unbekanntem Parameter linearisiert. Mit den Näherungswerten

der unbekanntem Parameter $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_o$. lassen sich Näherungswerte für die Beobachtungen $\tilde{\mathbf{y}}$ berechnen:

$$\mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_o) + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{e} \quad (13)$$

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_o) + \mathbf{e} \quad (14)$$

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_o + \mathbf{e} = \mathbf{y} + \mathbf{e} \quad (15)$$

sowie für die Restriktionen

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_o = \mathbf{w}. \quad (16)$$

Die Matrizen des Schätzmodells folgen mit

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{rg,1} \\ \dots \\ \mathbf{J}_{rg,n} \end{pmatrix} \quad (17)$$

als Koeffizientenmatrix,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{g,1} \\ \dots \\ \mathbf{P}_{g,n} \end{pmatrix} \quad (18)$$

als Beobachtungsvektor im linearisierten Schätzmodell und für die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{K}(\mathbf{r}_1), \dots, \mathbf{K}(\mathbf{r}_n))^{-1} \quad (19)$$

mit der Jacobimatrix aus Gl. (8).

Für Schätzung von Beobachtungen in den Zenit ergibt sich ein nicht voller Rang der Normalgleichungsmatrix, weil die Horizontalrichtungsmessung nicht bestimmbar ist. Die Schätzung im Modell mit nicht vollem Rang und Restriktionen folgt als (siehe Koch 1986, Koch 2000)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^+ \left(\mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{H}^T (\mathbf{H} (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^+ \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{H} (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^+ \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{y}) \right). \quad (20)$$

(⁺) ist die Moore-Penrose-Inverse, die durch eine Singulärwertzerlegung berechnet wird. Förstner und Wrobel (2016) zeigen einen Weg zur Vermeidung der aufwändigen Matrizenoperationen. Die Varianz- und Kovarianzmatrix folgt mit

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{1}{n - q - r} (\mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{y})^T \mathbf{P} (\mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{y}), \quad (21)$$

wenn q der Rang der Normalgleichungsmatrix ist. Der Vektor $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\beta}_o$ enthält den mittleren Richtungsvektor, der mit Gl. (7) und Gl. (2) zurück in geodätische Richtungsmessungen gerechnet wird. Für diese mittleren Richtungen folgt die Varianz- und Kovarianzmatrix aus Gl. (9).

4 Experimente

4.1 Definition der Experimente

Die Experimente erfolgen mit simulierten geodätischen Messungen in acht ausgewählten Messrichtungen (siehe Abb. 1). Die ausgewählten Richtungen entsprechen den folgenden geodätischen Sollmessungen (h = Horizontalrichtung, v = Vertikalrichtung, jeweils in Gon):

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|-----|---------|----------|----------|----------|--------|----------|----------|----------|
| h | 50,0000 | 150,0000 | 250,0000 | 350,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 100,0000 | 100,0000 |
| v | 50,0000 | 50,0000 | 50,0000 | 50,0000 | 0,0000 | 100,0000 | 0,0000 | 100,0000 |

Die Punkte P1 bis P4 sind die Winkelhalbierenden der positiven Quadrate. Sie dienen als Beispiele für Richtungsmessungen in beliebige, nicht spezielle Richtungen. Die Punkte P5 bis P8 sind spezielle Konstellationen: die Richtungen von P5 und P7 zeigen in den Zenit, P6 in Richtung der Ordinate (Nullrichtung der Richtungsmessung) und P8 in Richtung der Abszisse (in der Horizontalebene des Messstandpunkts).

Für die Richtungsschätzung aus Richtungsvektoren werden Messungen im mathematischen Polarkoordinatensystem benötigt. Die entsprechenden idealen Messungen im mathematischen Koordinatensystem (Azimut a , Elevation e) sind hier informatorisch angegeben:

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|-----|--------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| a | 0,7854 | -0,7854 | -2,3562 | -3,9270 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 0,0000 |
| e | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 0,7854 | 1,5708 | 0,0000 | 1,5708 | 0,0000 |

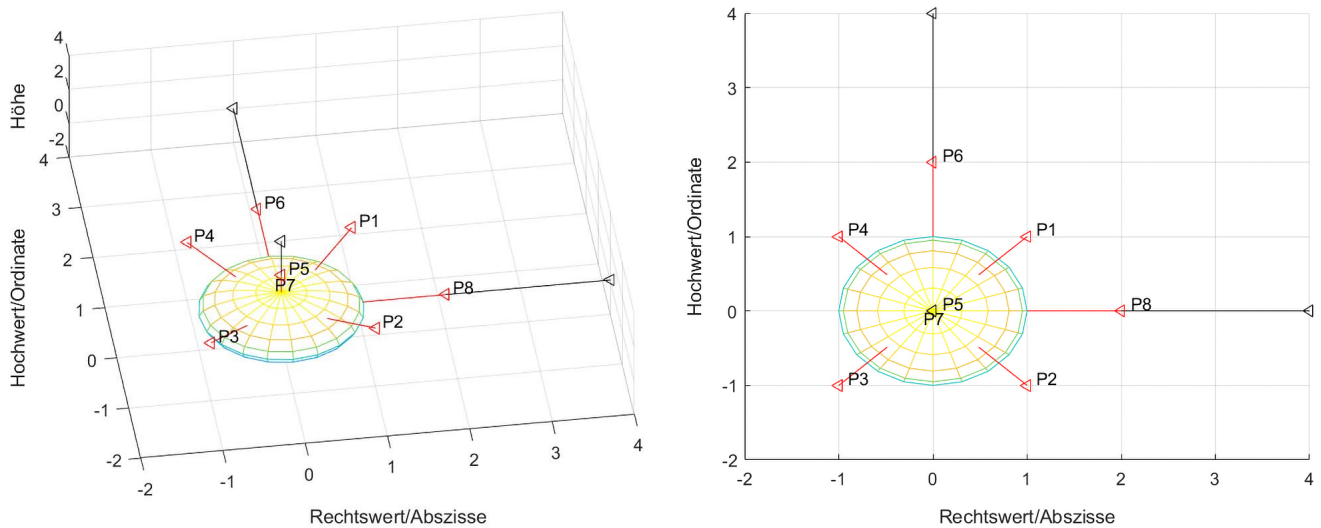


Abb. 1: Die Abbildung zeigt die simulierten Richtungen im Tachymetersystem, das hier parallel ausgerichtet zum Landessystem ohne Beschränkung der Allgemeinheit gewählt ist (links: Schrägsicht, rechts: Draufsicht).

4.2 Durchführung der Experimente

Für jeden der ausgewählten Punkte P1 bis P8 werden fünf geodätische Richtungsbeobachtungen in zwei Lagen für die Horizontal- und die Vertikalrichtung, also zehn Richtungen in Paaren generiert. Obwohl die zehn Richtungsbeobachtungen i. d. R. in der geodätischen Praxis abwechselnd

in der Lage I und Lage II durchgeführt und dokumentiert werden, sind diese hier der Übersichtlichkeit wegen nach Lage I und Lage II sortiert. Zu den Sollbeobachtungen wird dazu durch ein normalverteiltes Rauschen mit der Standardabweichung $\sigma = 0.001$ gon addiert, was der Genauigkeit eines Ingenieurtachymeters entspricht. Die resultierenden Messungen werden in den Wertebereich

[0 gon ... 400 gon[reduziert, da Ablesungen am Tachymeter nur in dem Wertebereich möglich wären. Alle simulierten Beobachtungen sind in Tab. 1 aufgeführt. Für alle

acht Punkte werden die Mittelungen mit beiden Verfahren durchgeführt. Die Umsetzung erfolgte in Matlab®. Die Ergebnisse sind im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

Tab. 1: Übersicht über die simulierten Richtungsmessungen in den ausgewählten acht Richtungen

| Punkt 1 (beliebige Richtung im 1. Quadranten): | | | | | | | | | | |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M1-1 | M1-2 | M1-3 | M1-4 | M1-5 | M1-6 | M1-7 | M1-8 | M1-9 | M1-10 |
| <i>h</i> | 49,9994 | 49,9992 | 49,9992 | 49,9994 | 49,9998 | 249,9991 | 249,9985 | 249,9998 | 249,9980 | 250,0012 |
| <i>v</i> | 50,0012 | 49,9989 | 49,9994 | 50,0002 | 50,0006 | 350,0008 | 350,0009 | 350,0002 | 349,9987 | 350,0020 |

| Punkt 2 (beliebige Richtung im 2. Quadranten): | | | | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M2-1 | M2-2 | M2-3 | M2-4 | M2-5 | M2-6 | M2-7 | M2-8 | M2-9 | M2-10 |
| <i>h</i> | 149,9997 | 150,0018 | 149,9981 | 149,9996 | 149,9986 | 350,0013 | 350,0005 | 350,0008 | 349,9995 | 350,0006 |
| <i>v</i> | 50,0006 | 50,0018 | 49,9989 | 50,0014 | 49,9997 | 350,0001 | 349,9997 | 350,0009 | 350,0018 | 349,9994 |

| Punkt 3 (beliebige Richtung im 3. Quadranten): | | | | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M3-1 | M3-2 | M3-3 | M3-4 | M3-5 | M3-6 | M3-7 | M3-8 | M3-9 | M3-10 |
| <i>h</i> | 250,0006 | 249,9998 | 249,9990 | 249,9988 | 250,0009 | 49,9994 | 49,9985 | 49,9980 | 50,0004 | 49,9995 |
| <i>v</i> | 49,9995 | 50,0006 | 49,9997 | 49,9993 | 49,9985 | 350,0000 | 350,0003 | 350,0002 | 349,9987 | 350,0006 |

| Punkt 4 (beliebige Richtung im 4. Quadranten): | | | | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M4-1 | M4-2 | M4-3 | M4-4 | M4-5 | M4-6 | M4-7 | M4-8 | M4-9 | M4-10 |
| <i>h</i> | 349,9997 | 350,0000 | 350,0001 | 350,0004 | 349,9990 | 150,0008 | 149,9988 | 149,9995 | 150,0004 | 150,0004 |
| <i>v</i> | 49,9981 | 50,0003 | 50,0004 | 50,0013 | 49,9982 | 349,9997 | 350,0011 | 350,0009 | 350,0015 | 350,0006 |

| Punkt 5 (Richtung zum Zenit): | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M5-1 | M5-2 | M5-3 | M5-4 | M5-5 | M5-6 | M5-7 | M5-8 | M5-9 | M5-10 |
| <i>h</i> | 399,9994 | 0,0016 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0004 | 199,9989 | 200,0002 | 200,0002 | 200,0000 | 199,9996 |
| <i>v</i> | 399,9994 | 399,9997 | 399,9984 | 399,9999 | 399,9998 | 0,0017 | 399,9979 | 399,9994 | 0,0015 | 0,0017 |

| Punkt 6 (in Richtung der Ordinate): | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M6-1 | M6-2 | M6-3 | M6-4 | M6-5 | M6-6 | M6-7 | M6-8 | M6-9 | M6-10 |
| <i>h</i> | 0,0004 | 0,0019 | 0,0007 | 0,0009 | 399,9991 | 200,0005 | 200,0007 | 199,9987 | 199,9985 | 200,0008 |
| <i>v</i> | 99,9989 | 100,0006 | 99,9985 | 100,0006 | 100,0008 | 300,0005 | 299,9993 | 299,9993 | 299,9996 | 300,0001 |

| Punkt 7 (Richtung zum Zenit): | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M7-1 | M7-2 | M7-3 | M7-4 | M7-5 | M7-6 | M7-7 | M7-8 | M7-9 | M7-10 |
| <i>h</i> | 100,0003 | 99,9992 | 100,0003 | 100,0002 | 100,0007 | 300,0011 | 300,0015 | 300,0002 | 299,9992 | 299,9976 |
| <i>v</i> | 0,0008 | 399,9997 | 0,0013 | 399,9979 | 399,9990 | 399,9997 | 0,0007 | 399,9991 | 399,9980 | 399,9983 |

| Punkt 8 (in Richtung der Abszisse): | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | M8-1 | M8-2 | M8-3 | M8-4 | M8-5 | M8-6 | M8-7 | M8-8 | M8-9 | M8-10 |
| <i>h</i> | 99,9990 | 100,0002 | 99,999 | 100,0002 | 99,9996 | 299,9983 | 300,0005 | 299,9994 | 300,0008 | 299,9986 |
| <i>v</i> | 100,0002 | 99,9992 | 100,0012 | 99,9996 | 100,0004 | 300,0002 | 300,0014 | 300,0000 | 300,0016 | 299,9983 |

5 Ergebnisse und Diskussion

5.1 Ergebnisse der Optimierungen

Die einfache Mittelung der Richtungsmessungen als Ablesungen einer Horizontal- bzw. Vertikalrichtungsmessung liefert folgende Ergebnisse (in gon):

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|-----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| h | 49,9994 | 150,0000 | 249,9995 | 349,9999 | 160,0001 | 120,0002 | 180,0000 | 99,9996 |
| v | 49,9998 | 50,0001 | 49,9998 | 49,9995 | 0,0010 | 100,0001 | 0,0011 | 99,9999 |

mit den Standardabweichungen (in gon)

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|------------|--------|--------|--------|--------|---------|----------|----------|--------|
| σ_h | 0,0008 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0007 | 84,3274 | 193,2174 | 103,2799 | 0,0008 |
| σ_v | 0,0011 | 0,0011 | 0,0007 | 0,0011 | 0,0007 | 0,0008 | 0,0006 | 0,0011 |

Durch die Schätzung über die Richtungsvektoren erhält man

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|-----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|
| h | 49,9994 | 150,0000 | 249,9995 | 349,9999 | 199,9995 | 0,0002 | 99,9978 | 99,9996 |
| v | 49,9998 | 50,0001 | 49,9998 | 49,9995 | 0,0005 | 100,0001 | 0,0003 | 99,9999 |

mit den folgenden Standardabweichungen

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|------------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|--------|
| σ_h | 0,0010 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0005 | 16,4715 | 0,0004 | 15,1089 | 0,0003 |
| σ_v | 0,0007 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |

Die Ergebnisse der Berechnungen können in Bezug auf die geschätzte mittlere Richtung sowie deren geschätzte Genauigkeit beurteilt werden.

5.2 Beurteilung der geschätzten mittleren Richtung

Die einfache Mittelbildung liefert korrekte Ergebnisse für P1 bis P4 sowie für P8. Für die Messsituationen in Richtung des Zenits (P5, P7) sowie in Richtung der Ordinate (P6) versagt die direkte Mittelbildung der Horizontalrichtungsmessungen aufgrund der Zyklizität der Horizontalrichtungsangaben im rechtsseitig offenen Intervall von 0 gon bis 400 gon. Historisch konnte mit dem Theodoliten bzw. Tachymeter aufgrund der unmöglichen Anzielung durch das dann nicht zugängliche Fernrohr nicht im Zenit gemessen werden. Durch eine geeignete Wahl der Nullrichtung für die Horizontalrichtungsmessung könnte die Situation des Falls P6 vermieden werden.

Die Mittelung der Richtungen über die Richtungsvektoren liefert für alle Situationen (P1 bis P8) korrekte Ergebnisse. Auffällig sind die geschätzten mittleren Horizontal-

richtungen für die Punkte im Zenit (P5 und P6). Bei einer Messung in den Zenit ist die Horizontalrichtung unbestimmt, also auch unbestimmbar. Es ergibt sich ein Rangdefekt der Ausgleichung, der durch die Pseudoinverse behandelt wird. Jede beliebige geschätzte Horizontalrichtung ist richtig.

5.3 Beurteilung der geschätzten Genauigkeiten

Bei der einfachen Mittelung liegen die Genauigkeiten für korrekte Ergebnisse im Bereich der Erwartungen und entsprechen den simulierten Messgenauigkeiten. In den Fällen mit einem falschen Mittelwert sind die Standardabweichungen überhöht und können bei bekannter Messgenauigkeit so als Indizien für falsche Schätzungen in speziellen Messsituation herangezogen werden. Aufgrund des

Berechnungsschemata sind die Schätzungen für die Horizontalrichtung und die Vertikalrichtung unkorreliert.

Für die Schätzung über die Richtungsvektoren ergeben sich in allen Fällen plausible Ergebnisse. Auffällig sind die Standardabweichungen der geschätzten Horizontalrichtungen für die im Zenit gemessenen Punkte P5 und P7. Die hohen Werte zeigen aufgrund der Unbestimmbarkeit die hohe Varianz der Messungen. Empirisch hat sich gezeigt, dass aus der Umformung des gemittelten Vektors in die geodätischen Messungen wieder unkorrelierte Schätzwerte für die Richtungsmessungen resultieren.

Die Abweichungen in der geschätzten Genauigkeit kommen durch die unterschiedliche statistische Modellbildung der beiden Verfahren zustande. Für die einfache Mittelung werden unabhängig zwei Standardabweichungen, eine für die Horizontalrichtungsmessungen und eine für die Vertikalrichtungsmessungen, berechnet. Im Schätzverfahren unter Ausnutzung der Richtungsvektoren wird für die Richtungsvektoren eine einzelne Varianz der Gewichtseinheit ($\hat{\sigma}_0^2$) geschätzt. Die unterschiedlichen Werte ergeben sich hier erst durch die Varianz-/Kovarianzfortpflanzung bei der Rückrechnung in den Beobachtungsraum.

6 Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag werden zwei Verfahren zur Berechnung von mittleren Richtungen verglichen: a) die direkte Mittelung der Richtungsbeobachtungen und b) die Mittelung durch Richtungsvektoren. Der neue Ansatz über Richtungsvektoren bietet klare Vorteile gegenüber dem traditionellen Ansatz, da auch Messungen in den Zenit und in Richtung der Ordinatenachse korrekt verarbeitet werden können, die mit modernen automatisierten Tachymetern im Gegensatz zu früheren Tachymetern mit optischer Fernrohrzielung gemessen werden können, und so zwangsfrei Messanordnungen gewählt werden können. Nachteilig ist die komplexe Berechnung, die aber aufgrund der Digitalisierung der Auswertung und der Rechenleistung der

Computer und Tachymeter selbst ohne weiteres möglich ist. Grundsätzlich ist ein Umdenken in der terrestrischen Vermessung für Tachymetermessungen erforderlich. Auch andere tradierte Rechenschemata müssen aufgrund der neuen Möglichkeiten der Tachymeter überdacht werden. Eine notwendige Erneuerung des geodätischen Rechnens zeichnet sich ab.

Literatur

- Förstner, W., Wrobel, B. (2016): Photogrammetric Computer Vision. Springer.
- Gielsdorf, F., Rietdorf, A., Gruendig, L. (2004): A Concept for the calibration of terrestrial laser scanners. In: Proceedings of the FIG Working Week. Athens, Greece.
- Koch, K.-R. (1986): Parameterschätzung und Hypothesentests. Dümmler-Verlag, Bonn.
- Koch, K.-R. (2000): Einführung in die Bayes-Statistik. Springer-Verlag, Berlin.
- Meyer, T., Brunn, A., Stilla, U. (2021): Accuracy investigation on image-based change detection for BIM compliant indoor models. In: ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, V-4-2021, 105–112.
- Rietdorf, A. (2005): Automatisierte Auswertung und Kalibrierung von scannenden Messsystemen mit tachymetrischem Messprinzip. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Deutsche Geodätische Kommission, Heft 582, München.
- Witte, B. (2011): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. Wichmann.

Kontakt

Prof. Dr.-Ing. Ansgar Brunn
Technische Hochschule Würzburg-Schweinfurt
Fakultät für Kunststofftechnik und Vermessung
Röntgenring 8, 97070 Würzburg
geo.thws.de
ansgar.brunn@thws.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.